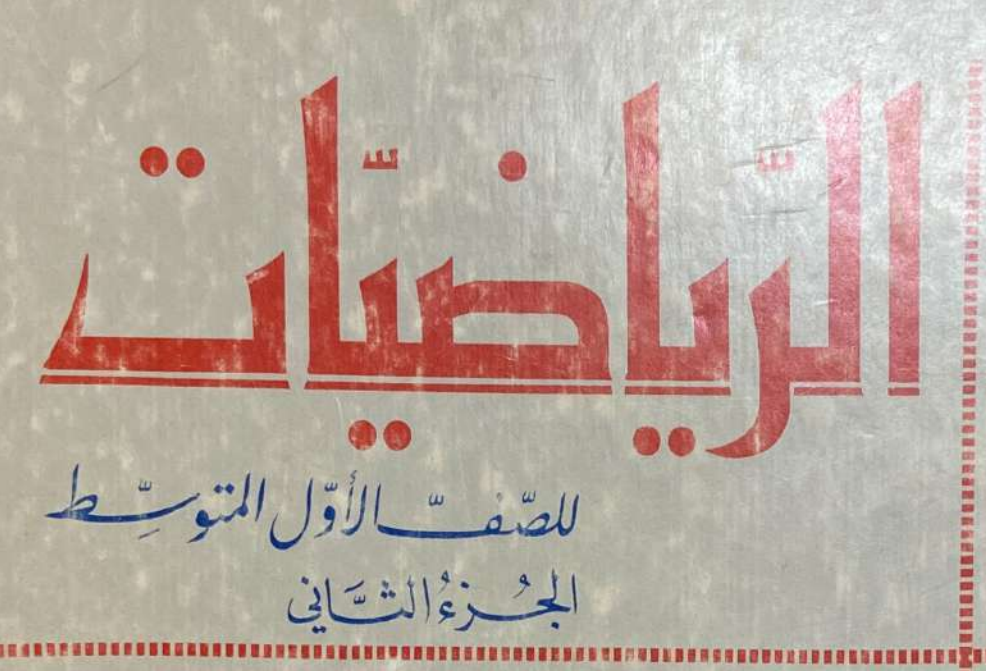


ملكة العربية السعودية
وزارة المعارف

لمديرية العامة للأبحاث
والمناهج والمواد التعليمية



الرياضيات

للصف الأول المتوسط
الجزء الثاني



الطبعة الأولى
١٣٩٩هـ - ١٩٧٩م

، وزارة المعارف تدريس هذا
اب وطبعه على نفقتها

يوزع مجاناً ولا يباع

الرِّياضِيَّات

الجُزءُ الثَّاني

للصَّفِّ الأوَّل المتوسِّط



المملكة العربية السعودية

وزارة المعارف

المديرية العامة للأبحاث والمناهج والمواد التعليمية

تم اعداد هذا الكتاب

في المركز التربوي للعلوم والرياضيات

الجامعة الأميركية في بيروت

التحرير والإشراف : الدكتور ر. أ. عيدو

لجنة التأليف :

الرئيس : الدكتور ر. أ. عيدو

الأعضاء : الدكتور ف. ملحم

ل. باسيلا

م. مرجه

ن. الزيات

قررت وزارة المعارف تدريس هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

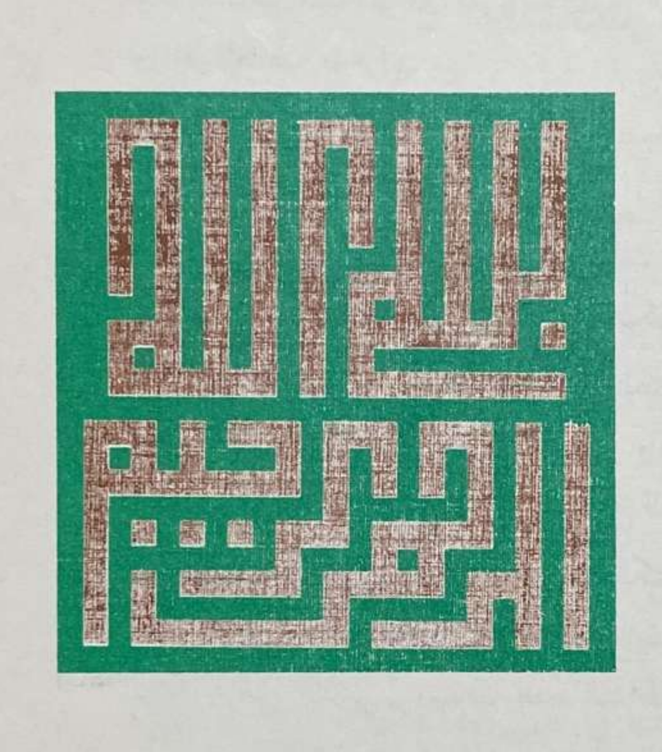
الرياضيات

الجزء الثاني

للصف الأول المتوسط

الطبعة الأولى
١٣٩٩هـ - ١٩٧٩م

الرسوم : آ. اسعد
الاخراج الطباعي والتنضيد : الاستشارات والخدمات التربوية ش.م.م.
الطباعة : دار الكتاب اللبناني


بسم الله الرحمن الرحيم

مُقَدّمَة

بعون الله تعالى تمّ تأليف كتاب الرياضيات للصف الأول المتوسط . وجاء هذا الكتاب منسجمًا مع سياسة التعليم في المملكة من خلال تحقيقه لغاية هذا التعليم وأهدافه بشكل عام ، ولأهداف المرحلة المتوسطة بشكل خاص . كما جاء هذا الكتاب منسجمًا مع مقررات المنهج الرسمي للرياضيات الذي اعتمدته وزارة المعارف مؤخرًا .

نلاحظ أولاً أننا أطلقنا اسم «الرياضيات» على الكتاب ككل ، بدل تقسيمه كما جرت العادة سابقًا إلى أجزاء تتناول الحساب والجبر والهندسة منفصلة بعضها عن بعض ؛ ويعكس ذلك النظرة الحديثة إلى المواضيع التي يعالجها المنهج بشكل عام ، والكتاب بشكل خاص .

فانطلاقًا من لغة المجموعات يعالج الكتاب موضوعات الكم (الأعداد والجبر) ، والشكل (الهندسة) ، والقياس والهندسة التحليلية (ربط الشكل بالعدد) من خلال نظرة شاملة وموحدة للمفاهيم الرياضية .

ومن ناحية أخرى فقد شددنا في هذا الكتاب على العامل الفردي في عملية التعلم . ويظهر ذلك جليًا من خلال النشاطات المخصصة للتلميذ ، والتي تسبق دائمًا عرض الدرس . وتهدف هذه النشاطات إلى :

مساعدة التلميذ على إنماء قدراته على الملاحظة واستخلاص النتائج .
تدريب التلميذ على إتقان الرسم الهندسي .
وضع التلميذ في موقف عملي وموقف فكري يجعلانه يتحسّس ضرورة التعاريف والقواعد الرياضية اللاحقة ، ويتفهم علاقاتها مع المفاهيم السابقة .

قسّم هذا الكتاب إلى جزءين ، وخصّص كل جزء لفصل دراسي واحد ؛ يتألف الجزء الأول ، وهو الأطول ، من سبعة فصول :

فصلان مخصّصان للمجموعات والعمليات عليها، ويهدفان إلى تنظيم لغة الرياضيات وإلى التعامل مع الرموز.

فصل واحد حول الأعداد الكلّية، يهدف إلى التعرف على هذه الأعداد، والعمليات عليها من خلال مفهوم المجموعات.

أربعة فصول حول الهندسة الإقليدية، خصّص الفصل الأول منها للمفاهيم الهندسية الواردة في المنهج الجديد للمرحلة الابتدائية، والتي كان بعضها غائبًا عن المنهج القديم. وقد أدّى هذا الفصل إلى تطويل الجزء الأول من الكتاب، وعلى المعلم المرور على هذا القسم بسرعة، آخذًا بعين الاعتبار تجاوب التلاميذ، ليستطيع إنجاز هذا الجزء خلال الفصل الأول من السنة الدراسية.

يتألف الجزء الثاني من سبعة فصول:

فصلان حول الأعداد.

ثلاثة فصول حول الهندسة الإقليدية.

فصل واحد حول العلاقات.

فصل واحد حول الهندسة التحليلية.

ومن ناحية أخرى فقد اعتمدنا في تأليف هذا الكتاب وإخراجه لونين أساسيين:

اللون البني: للنشاطات والتمارين المرافقة، والمعروضة على الهامش، وهو مخصّص لعمل التلميذ في الصف. ودور المعلم في هذا القسم هو دور المرشد والمساعد عند الحاجة.

اللون الأسود: للدروس والملاحظات المهمة المعروضة على الهامش.

وأملنا أن يساهم هذا الكتاب في إثارة فضول التلاميذ، وإنماء مهاراتهم، وتعزيز ثقتهم بأنفسهم، وبقدراتهم على التعلّم والابتكار.

والله وليّ التوفيق

رئيس لجنة المؤلفين

الدكتور رفيق أ. عيدو



الفصل الثامن :

التوازي

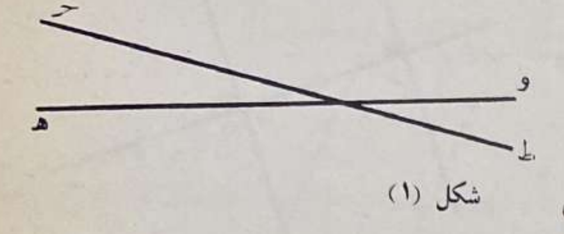
الدرس الأول : تعريف مستقيمين متوازيين

الدرس الثاني : توازي المستقيمات وتعامدها

الدرس الثالث : التوازي والتناظر حول محور

الدرس الرابع : تطبيقات على التوازي والتعامد

الدّرس الأول : تعريف مُستقيمَين متوازيين



شكل (١)

١) **توازي مستقيمين**

■ على الشكل (١) مستقيمان : هـ و وَ ح ط . حدّد نقطة تقاطعهما وسمّها .

انتسخ الشكل (٢) . مدّد القطعتين المرسومتين . هل يتقاطع المستقيمان ب جـ وَ ك ل ؟

ك ل

جـ ب

شكل (٢)

انتسخ الشكل (٣) . مدّد القطعتين المرسومتين .
هل يتقاطع المستقيمان ا ب وَ س ص ؟

بالنسبة لمستقيمين مختلفين في مستوى واحد ، نلاحظ أنهما يكونان إمّا متقاطعين (كما على الشكلين (١) وَ(٢)) ، وإمّا غير متقاطعين (كما على الشكل (٣)) .

في الحالة الأخيرة نقول : إن المستقيمين **متوازيان** .

ا ب

س ص

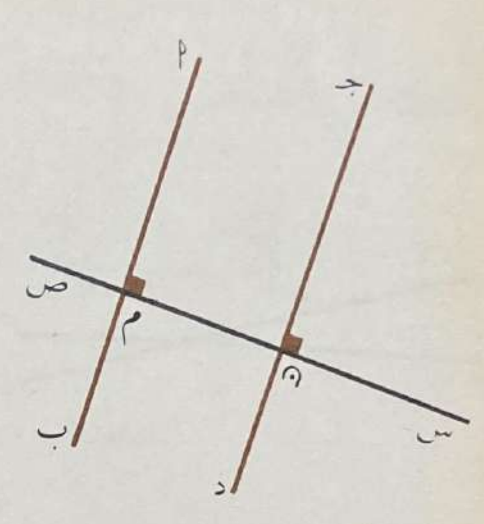
شكل (٣).

يقال عن مستقيمين ا ب وَ س ص إنهما متوازيان عندما لا يلتقيان أبدًا . ونكتب رمزيًا : ا ب // س ص

ا ب // س ص
يكافئه
ا ب ∩ س ص = ϕ

■ دلّ على مستقيمات متوازية في غرفة الصف .

٢) توازي عمودين على مستقيم واحد



شكل (٤)

- انتسخ من جديد الشكل (٣). جد طيّاً يجعل جزءاً من كل مستقيم يطابق جزءه الآخر. ارسم خط الطّي. ماذا تقول عن خط الطيّ بالنسبة لكلٍ من ﻫب وَ س ص؟

- على الشكل (٤) ﻫب ⊥ س ص وَ جـ د ⊥ س ص.
انتسخ الرسم ومدّد ﻫب وَ جـ د قدر المستطاع. ماذا تلاحظ بالنسبة لالتقائهما؟
لنفترض أن ﻫب ∩ جـ د = {جـ}.
هل يمكن أن يمرّ عمودان على س ص في نقطة واحدة؟ لماذا؟
هل افتراضنا صحيح؟ كيف هما المستقيمان ﻫب وَ جـ د؟

لاحظت في القسم الأول من نشاطك السابق أنه عندما يكون مستقيمان متوازيين فهما عموديان على مستقيم واحد. وأثبتّ في القسم الثاني من النشاط أن ﻫب // جـ د.

إذا كان:
ﻫب ⊥ س ص
جـ د ⊥ س ص
ﻫب ≠ جـ د

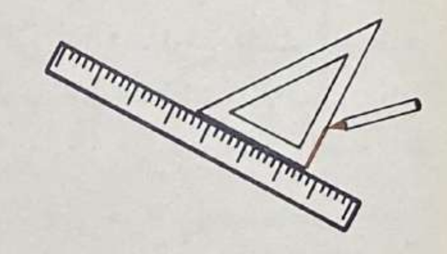
فإن:
ﻫب // جـ د

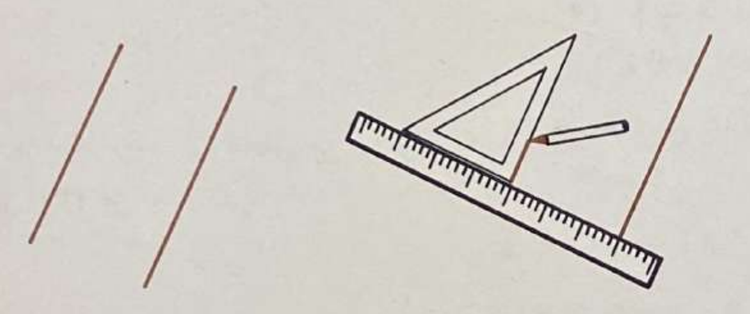
كل عمودين على مستقيم واحد هما متوازيان.

٣) إنشاء مستقيمين متوازيين

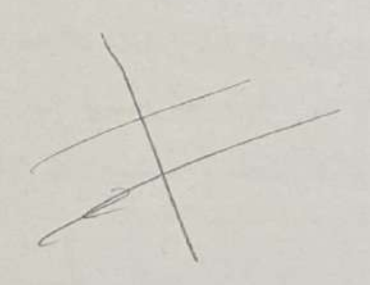
كي ننشئ مستقيمين متوازيين يكفي أن ننشئ عمودين على مستقيم واحد.

■ قم بنشاط مشابه للنشاط التالي لرسم مستقيمين متوازيين.





شكل (٥)



تمارين :

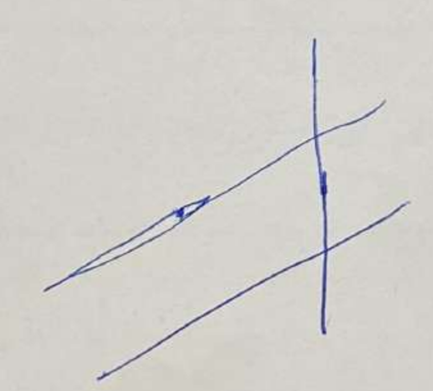
١) ارسم مستقيمين متوازيين. كرّر العمل عدة مرات.

٢) ارسم مستقيمًا س ص، ثم ارسم ثلاثة مستقيمات موازية له.

٣) استعمل المسطرة ومثلث الرسم كي تتحقق من توازي المستقيمين على الشكل (٣) من هذا الدرس.

٤) أ د ارتفاع في المثلث أ ب جـ. ارسم أ ق بحيث: أ ق ⊥ أ د. ماذا تقول عن أ ق وَ ب جـ؟ لماذا؟

٥) أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع. ارسم المستقيمات الموازية للأضلاع، والتي تمرّ في رؤوس المثلث. استخدم المسطرة كي تقارن أطوال قطع المستقيمات على الرسم. ماذا تلاحظ؟



الدرس الثاني : توازي المستقيمات وتعامدها

١) مصادرة إقليدس

■ س ص مستقيم. ﻫ ∉ س ص.

ارسم العمود على س ص والمار في ﻫ، وسمّه ﻫ ك.

ارسم العمود على ﻫ ك والمار في ﻫ، وسمّه ﻫ ل.

هل ﻫ ل وَ س ص متوازيان؟ لماذا؟

■ ارسم عمودًا على س ص، وسمّه ع ط.

ارسم العمود على ع ط المار في ﻫ، وسمّه ﻫ م.

هل ﻫ م وَ س ص متوازيان؟ لماذا؟ ماذا تلاحظ بالنسبة لـ ﻫ م وَ ﻫ ل؟

■ ارسم مستقيمًا، ثم عيّن نقطة غير منتمية إليه. كم مستقيمًا موازيًا لهذا المستقيم، ويمر في هذه النقطة، تستطيع أن ترسم؟

ﻫ ×

ص

س

شكل (١)

> **إقليدس هو العالم اليوناني الذي وضع البناء الأساسي لعلم الهندسة الذي نتعلمه، وقد سمي بالهندسة الاقليدية نسبة لهذا العالم.**
>
> **مصادرة هي الترجمة العربية لكلمة POSTULATE. وتعني نتيجة الملاحظة. ويقبل بها طالب العلم دون برهان رياضي، لأنه انطلاقًا منها تبرهن النتائج، ولا يمكن ان تُبرهن هي بما سبقها.**

لاحظت فيما سبق خاصية أساسية للمستقيمات المتوازية تعرف باسم **مصادرة إقليدس** وهي : حفظ

> من نقطة غير منتمية الى مستقيم معطى نستطيع إنشاء مستقيم واحد فقط موازٍ لهذا المستقيم المعطى.

٢) المستقيمات المتوازية

■ على الشكل (٢) س ص مستقيم. أب// س ص وَ جـ د// س ص.
أب ≠ جـ د.
لنفترض أن أب ∩ جـ د = {م}.
هل نستطيع من النقطة م إنشاء مستقيمين موازيين لـ س ص؟ لماذا؟ هل افتراضنا السابق صحيح؟ كيف هما المستقيمان أب وَ جـ د؟

شكل (٢)

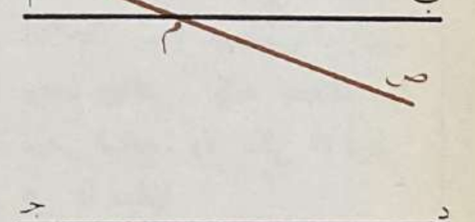
أثبت في النشاط السابق النتيجة التالية:

كل مستقيمين مختلفين موازيين لمستقيم ثالث هما متوازيان

إذا كان:
أب// س ص
جـ د// س ص
أب ≠ جـ د
فإن:
أب// جـ د

٣) المستقيمات المتوازية والقواطع

تقول عن مستقيم إنه **قاطع** لمستقيم آخر إذا التقاه في نقطة واحدة.
على الشكل (٣) أب وَ جـ د مستقيمان متوازيان. س ص هو قاطع لِ أب، وَ س ص ∩ أب = {م}.
سنثبت أن س ص هو قاطع لِ جـ د.
يأخذ س ص بالنسبة لِ جـ د أحد الأوضاع التالية:
١) س ص هو موازٍ لِ جـ د
٢) س ص = جـ د
٣) س ص هو قاطع لِ جـ د



شكل (٣)

■ لو كان س ص // جـ د فكم هو عدد المستقيمات الموازية لـ جـ د، والمارة

في م؟ هل هذا ممكن؟
هل الوضع رقم ١ صحيح؟

■ لو كان س ص = جـ د فكيف يكون جـ د بالنسبة لِ ٮ ب؟ هل هذا ممكن؟ هل الوضع رقم ٢ صحيح.
■ ما هي استنتاجاتك؟

أثبتّ فيما سبق ان س ص هو قاطع لِ جـ د، وبالتالي:

> إذا كان مستقيمان متوازيين، فإن كل قاطع لأحدهما هو قاطع للآخر أيضًا.

٤) العمود على مستقيمات متوازية

على الشكل(٤): ٮ ب، جـ د، ك ل ثلاثة مستقيمات متوازية.
س ص ⊥ ٮ ب.

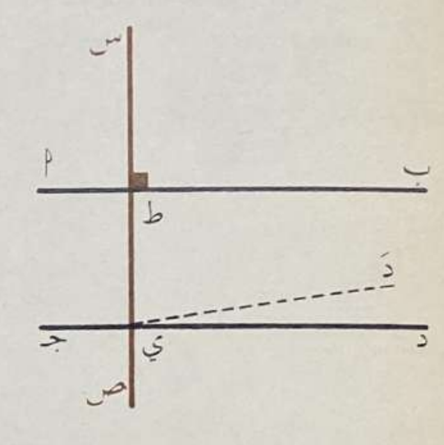
■ أثبتْ أن س ص هو قاطع لـ جـ د وَ لِ ك ل.
تحقّق من أن س ص عمودي على جـ د وَ ك ل.
ارسم مستقيمات أخرى موازية لِ ٮ ب، وتحقق من أنها عمودية على س ص.
ارسم مستقيمًا عموديًا على جـ د، ثم تحقق من أنه عمودي أيضًا على ٮ ب وَ ك ل.

س
ٮ ب
جـ د
ك ل
ص
شكل (٤)

لاحظت في النشاط السابق ما يلي :

حفظ

كل عمود على مستقيم معطى هو عمود على جميع المستقيمات الموازية للمستقيم المعطى .



شكل (٥)

على الشكل (٥) : اب // جـ د . س ص ⊥ اب .

■ أعطِ الحجج التي تبرّر الخطوات التالية لكي تثبت أن :

س ص ⊥ جـ د ، وبالتالي ان القاعدة السابقة هي صحيحة .

١) س ص هو قاطع لـ جـ د . سمّ ي نقطة التقاطع .

٢) إذا لم يكن س ص ⊥ جـ د فإن هناك مستقيمًا اخر ي دَ عموديًا على س ص ، ويمرّ في ي (ي دَ ≠ ي د) .

٣) ي دَ // اب .

٤) الافتراض في الخطوة رقم ٢ هو افتراض خاطئ .

٥) س ص ⊥ ي د .

تمارين :

١) أ وَ ب نقطتان من المستقيم س ص. أك وَ ب ل عمودان على س ص. م نقطة خارج س ص.

أ – أنشئ م جـ ⊥ أك، وَ م د ⊥ ب ل.

ب– ماذا تلاحظ بالنسبة للنقاط : م، جـ، د؟ أثبت هذه الملاحظة؟

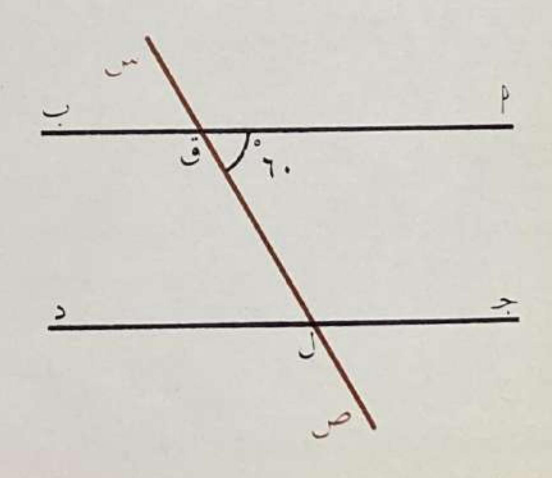
٢) $\widehat{[\text{هـ س، هـ ص}]}$ قطاع زاويّ بحيث إن :
$\widehat{\text{س هـ ص}}$ < ٩٠°.

أ – رقِّم نصف المستقيم [هـ س ، ثم أنشئ من أطراف القطع مستقيمات عمودية على هـ س.

ب– أثبت أن المستقيمات التي أنشأتها هي متوازية.

جـ– تحقق بواسطة القياس من أن القطع المحددة على [هـ ص لهذه المستقيمات المتوازية هي متطابقة.

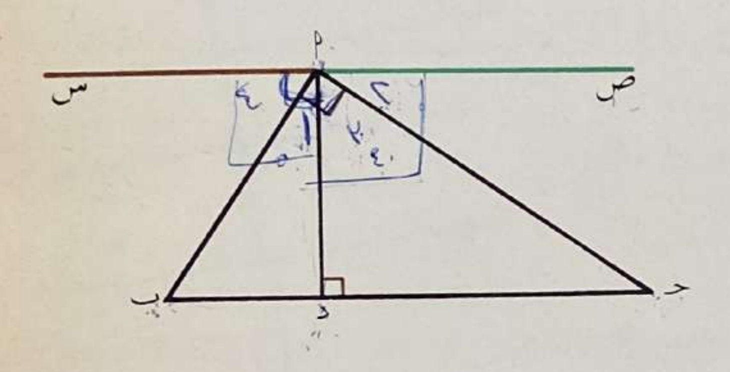
٣) على الرسم التالي : أب، جـ د، وَ س ص ثلاثة



مستقيمات ، بحيث إن : أب // جـ د ؛
س ص ∩ أب = {ق} ؛ س ص ∩ جـ د = {ل}
وَ $\widehat{\text{أ ق ل}}$ = ٦٠°

استعمل المنقلة كي تقيس زوايا القطاعات التي رأسها ق، وزوايا القطاعات التي رأسها ل. ماذا تلاحظ ؟

٤) في المثلث أب جـ : أ = ٩٠°، وَ أد هو ارتفاع. أنشأنا أص // د جـ.



أ – أثبت أن : $\widehat{\text{ب أ د}}$ = $\widehat{\text{جـ أ ص}}$.

ب– ليكن أس ⊥ أد. أثبت أن :
$\widehat{\text{ب أ س}}$ = $\widehat{\text{د أ جـ}}$.

جـ – أثبت بطريقتين مختلفتين أن النقاط : س، أ، ص هي على استقامة واحدة.

الدّرس الثالث : التوازي والتناظر حول محور

١) الأعمدة على المستقيمات المتوازية

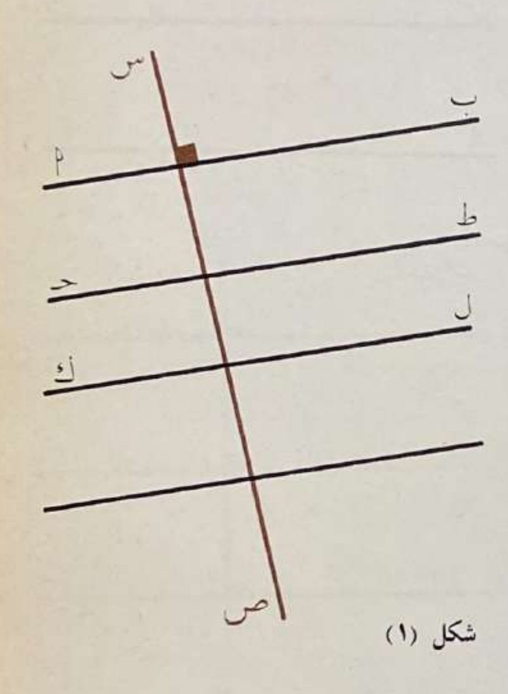
في الشكل (١)، أب ، حـط ، كل ، ... مستقيمات متوازية
س ص ⊥ أب .

■ هل س ص ⊥ حـط ؟ هل س ص ⊥ كل ؟... لماذا؟
في التناظر حول س ص : ما هو نظير كل من المستقيمات أب ، حـط ، كل ، ... ؟

انتسخ الرسم واطوِ الورقة حول س ص . ماذا تلاحظ بالنسبة لمطابقة المستقيمات ؟

■ ارسم عمودًا على حـط ، وسمّه دهـ .
هل دهـ عمودي على المستقيمات الأخرى في الرسم؟
هل دهـ هو محور تناظر للمستقيمات المتوازية : أب ، حـط ، كل ، ... ؟

■ جد محاور تناظر أخرى للمستقيمات أب ، حـط ، كل ، ...



شكل (١)

نستنتج من النشاط السابق ما يلي :

كل عمود على مستقيم هو محور تناظر لهذا المستقيم ولكل مستقيم موازٍ له .

٢) المستقيم المتوسط بين متوازيين

■ ارسم على ورقة مستقيمين متوازيين ٱب وَ جـ د.
اطوِ الورقة كي تطابق ٱب وَ جـ د.
افتح الورقة ثم ارسم خط الطي، وسمّه س ص.

لقد حصلت على رسم مشابه للشكل (٢).
س ص هو محور تناظر للشكل المؤلف من المستقيمين المتوازيين: ٱب وَ جـ د، ويسمى **المستقيم المتوسط** بينهما.

ٱ ب
س ص
جـ د

شكل (٢)

> المستقيم المتوسط بين متوازيين هو محور التناظر الذي يحوّل كل مستقيم منهما إلى الآخر.

٣) خصائص المستقيم المتوسط

■ ارسم مستقيمين متوازيين: ٱب وَ جـ د، ثم استخدم الطي كي ترسم المستقيم المتوسط بينهما، وسمّه س ص.

■ جد طيًّا يجعل جزءاً من كلٍ من المستقيمين: ٱب وَ جـ د يطابق جزءه الآخر. ماذا تلاحظ بالنسبة لـ س ص؟
كيف هي المستقيمات: ٱب، جـ د، س ص؟

لاحظت في النشاط السابق ما يلي:

> المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين هو موازٍ لهما.

■ أجب عن الأسئلة التالية لتثبت أن المستقيم المتوسط س ص بين مستقيمين متوازيين ا ب وَ جـ د هو مواز لهما :

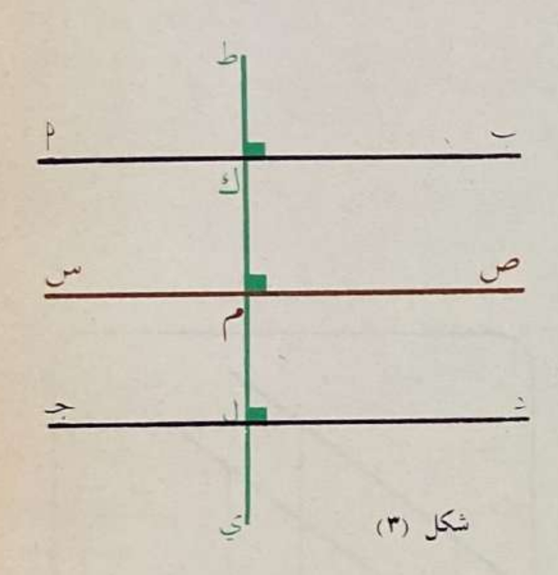
١) افترض أن : س ص ∩ ا ب = {م} ما هو نظير م بالتناظر حول س ص ؟

أثبت في هذه الحالة أن : م ∈ جـ د ، وبالتالي أن :

ا ب ∩ جـ د = {م} هل استنتاجك الأخير ممكن ؟

٢) استنتج أن س ص // ا ب

على الشكل (٣) : س ص هو المستقيم المتوسط بين المستقيمين المتوازيين : ا ب وَ جـ د ؛ م ∈ س ص ؛ ط ي هو العمود المشترك على ا ب ، جـ د ، س ص والمار في م.



شكل (٣)

■ ما هو نظير ك بالتناظر حول س ص ؟

ما العلاقة بين | م ك | وَ | م ل | ؟

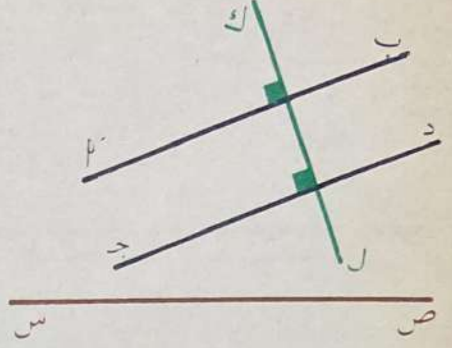
■ ما هي استنتاجاتك ؟

أثبت في النشاط السابق ما يلي :

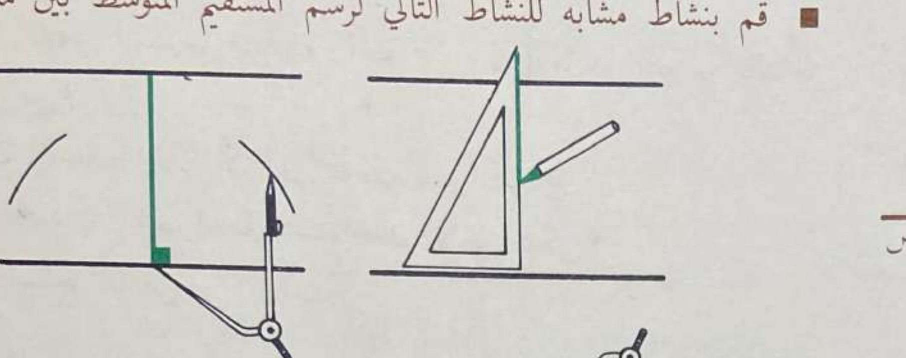
كل نقطة من المستقيم المتوسط بين مستقيمين متوازيين تبعد البعد نفسه عن هذين المستقيمين.

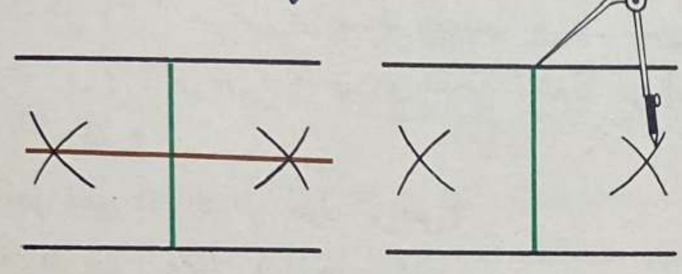
٤) رسم المستقيم المتوسط بين متوازيين

■ قم بنشاط مشابه للنشاط التالي لرسم المستقيم المتوسط بين متوازيين :



شكل (٤)





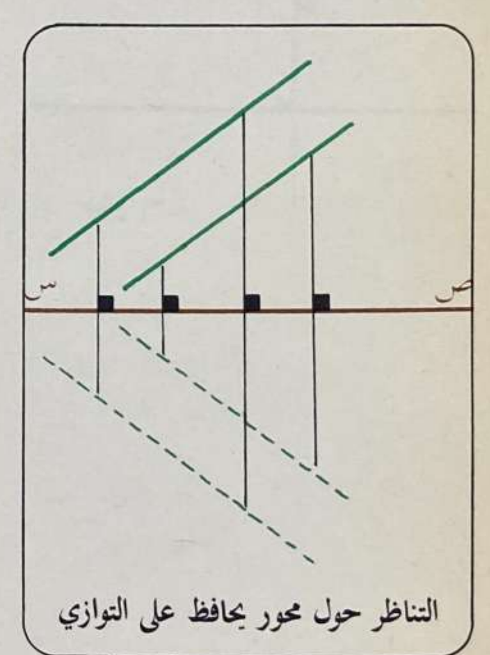
٥) التناظر حول محور والتوازي

على الشكل (٤) : ٲب // جـ د ، ك ل عمود مشترك على ٲب وَ جـ د .

■ ارسم : ٲَبَ ، جـَدَ ، كَلَ صور ٲب ، جـ د ، ك ل بالتناظر حول س ص .

هل كَلَ ⊥ ٲَبَ ، كَلَ ⊥ جـَدَ؟ لماذا؟

ماذا تستنتج بالنسبة لـ ٲَبَ ، جـَدَ؟ هل هما متوازيان؟



التناظر حول محور يحافظ على التوازي

لقد اثبتّ في النشاط السابق ما يلي :

التناظر حول محور يحافظ على التوازي .

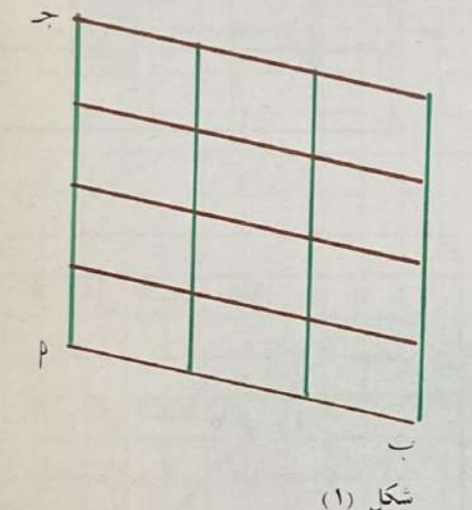
تمارين :

١) [ﺃب] قطعة مستقيم.
ﺃس ⊥ ﺃب؛ ب ص ⊥ ﺃب.
ك ل هو العمود المنصف لـ [ﺃب].
أ – أثبت أن: ك ل مواز لـ ﺃس وَ ب ص.
ب – أثبت أن: ك ل هو المستقيم المتوسط بين ﺃ س وَ ب ص.
جـ – ارسم مستقيمًا عموديًا على ﺃس، ب ص، ك ل؛ ثم سمّ: م، ﻥ، هـ نقاط التقاطع. قارن | م هـ | وَ | م ﻥ |.

٢) ﺃب جـ مثلث. م وَ ﻥ منتصفا [ﺃب] وَ [ﺃجـ]. س ص هو المستقيم المارّ في ﺃ، والموازي لـ ب جـ.
أ – ارسم المستقيم المتوسط بين س ص وَ ب جـ.
ب – استعمل القياس كي تجد نقطتين مُميّزتين على هذا المستقيم.

الدّرس الرابع : تطبيقات على التوازي وَالتعامُد

١) إنشاء شبكات تربيع



شكل (١)

على الشكل (١) رسمنا أولاً [اب] بحيث | اب| = ٤,٥ سم. وَ اجـ بحيث | اجـ| = ٤ سم. ثم قسّمنا [اب] إلى ثلاث قطع متطابقة، طول كل منها ١,٥ سم، وقسّمنا [اجـ] إلى أربع قطع متطابقة طول كل منها ١ سم.

من أطراف القطع على [اب] رسمنا مستقيمات موازية لـ اجـ، ومن أطراف القطع على [اجـ] رسمنا مستقيمات موازية لـ اب، فحصلنا على ما يسمى **شبكة تربيع**.

■ ارسم مستقيمين متعامدين : س ص ، ك ل ؛ حيث س ص ∩ ك ل = {م }.

قسّم نصف المستقيم [م س بقطع متطابقة متتالية، طول كل منها ما تشاء (١ سم مثلاً)، ثم ارسم من نقاط التقسيم مستقيمات موازية لـ ك ل.

قسّم [م ك بقطع متطابقة متتالية، طول كل منها مساو لطول القطعة على [م س، ثم ارسم من نقاط التقسيم مستقيمات موازية لـ س ص.

لقد حصلت على رسم مشابه للشكل (٢) يسمى «**شبكة تربيع عمودية نظيميّة**».

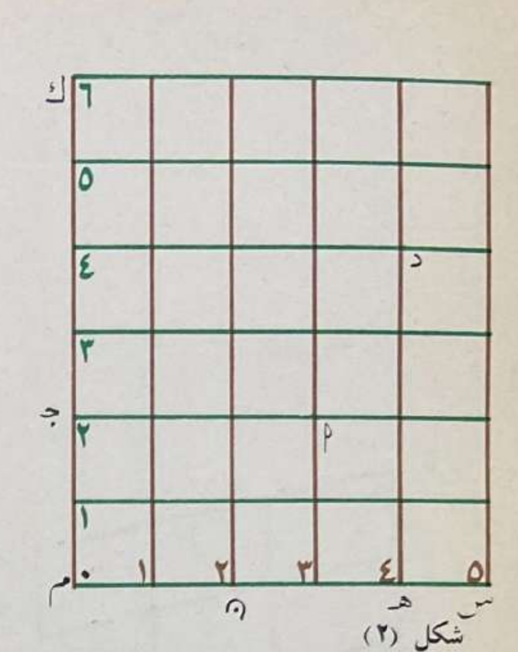
٢) تعيين النقاط على شبكة تربيع

نقاط تقاطع المتوازيات على شبكة تربيع تسمى **عُقَدًا** أو **نقاط الشبكة**.

كل نقطة من شبكة تربيع تحدد بالمستقيمين اللذين يلتقيان فيها.

النقطة أ مثلاً تنتمي الى المستقيم البنّي رقم ٣، وإلى المستقيم الأخضر رقم ٢ ؛ ونرمز اليها بالزوج المرتب : (٣، ٢) ، على أن يكون الحدّ الأوّل رقم المستقيم العمودي ، والحدّ الثاني رقم المستقيم الأفقي.

رمز هـ هو (٤، ٠)، ورمز جـ هو (٠، ٢). أما رمز م فهو (٠، ٠).

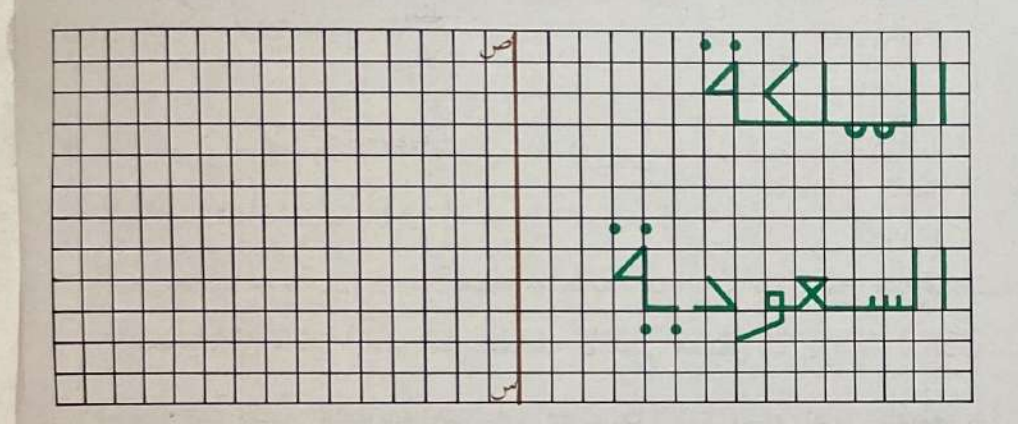


شكل (٢)

* على الشبكة أعلاه : ما رمز د ؟ ب ؟
* مثّل النقاط التي رموزها :
و = (١، ٢)، ط = (٢، ١)
ي = (٣، ٥)، ع = (٠، ٤)

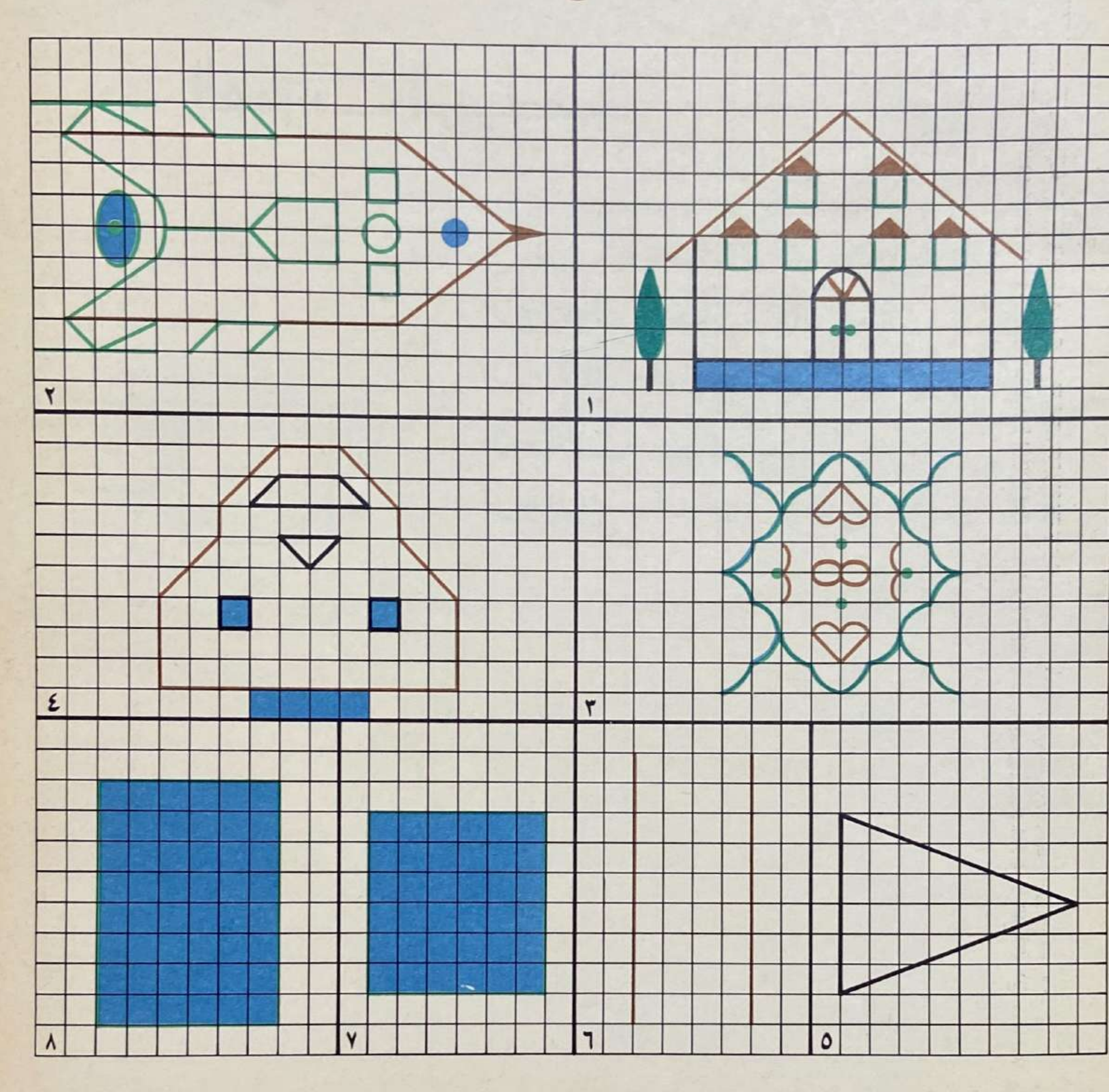
٣) رسم الشكل النظير على شبكة تربيع

■ س ص هو محور التناظر ، ارسم نظير الشكل ادناه مستعيناً بشبكة التربيع .



تحديد محاور التناظر

جد محاور التناظر للرسوم التالية مستعيناً بشبكة التربيع :



الفصل التاسع :

العبارات الرياضية

الدّرس الأول : العبارات الرّياضيّة

الدّرس الثاني : المعادلات في مجموعة الأعداد الكليّة

الدّرس الثالث : مسائل حسابيّة

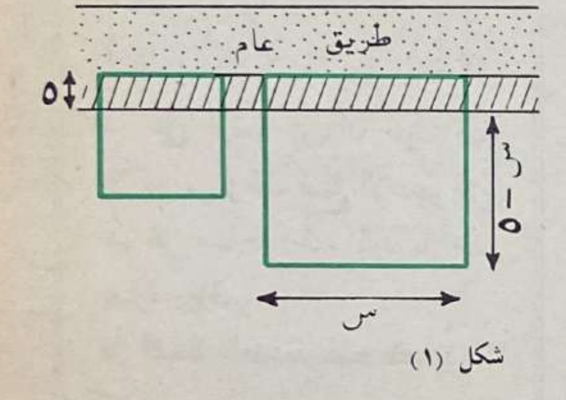
الدّرس الرابع : المتراجحات في مجموعة الأعداد الكلية

الدّرس الأول : العبَارات الرّياضيّة

١) العبارات الرياضية

▲ **مثال ١** : إذا رمزنا بالحرف ٩ إلى رقم أحاد عدد مؤلف من ثلاثة أرقام ، وبالحرف ع إلى رقم عشراته ، وبالحرف م إلى رقم مئاته لاستطعنا كتابة العدد على الشكل :

٩ + ١٠ × ع + ١٠٠ × م .



شكل (١)

وإذا حذفنا إشارة الضرب لتسهيل الكتابة ، واستعملنا الرمز س ص كرمز لـ س × ص لكتبنا العَدد السابق على الشكل :

٩ + ١٠ ع + ١٠٠ م .

▲ **مثال ٢** : الشكل (١) يمثّل قطَع أرض مربعة الشكل ، تقع على محاذاة الطريق العام .

عند توسيع الطريق فقدَ كل مالك جزءاً من قطعته عرضه ٥ أمتار .

لو رمزنا بالحرف س لطول ضلع إحدى القطع المربعة ، لأصبحت أبعاد القطعة بعد توسيع الطريق : س وَ س − ٥ ، ولأصبحت مساحتها :

س (س−٥) = س × س − س × ٥

أو $س^{٢}$ − ٥ س

٩ + ١٠ ع + ١٠٠ م في المثال الأول

وَ $س^{٢}$ − ٥ س في المثال الثاني هي **عبارات رياضية**.

كذلك ٥ ﺃ ب^{٢} هي عبارة رياضية تمثل حاصل ضرب العدد ٥ بالعدد ﺃ بمربع العدد ب.

٢) القيم العددية للعبارات الرياضية

إذا كان رقم آحاد العدد في المثال ١ من الفقرة السابقة هو ٥، ورقم عشراته ٣، ورقم مئاته ٧، لأصبح لدينا:

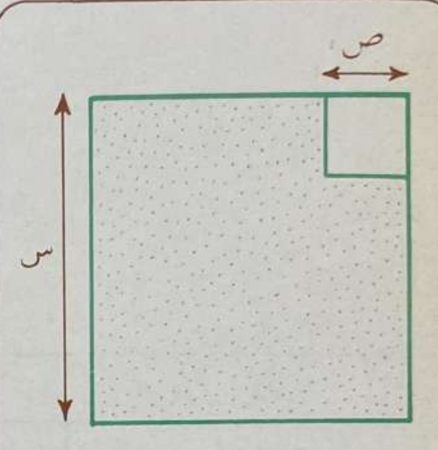
ﺃ + ١٠ ع + ١٠٠ م = ٥ + ٣ × ١٠ + ٧ × ١٠٠ = ٧٣٥

العدد ٧٣٥ هو **القيمة العددية** للعبارة الرياضية: ﺃ + ١٠ ع + ١٠٠ م، عندما تكون قيم المتغيرات: ﺃ = ٥، ع = ٣، م = ٧.

كذلك إذا كان بعد إحدى القطع المربعة في المثال ٢ يساوي ٦٠م، لكانت مساحة الأرض بعد توسيع الطريق:

س^{٢} − ٥ س = (٦٠)^{٢} − ٥ × ٦٠ = ٣٣٠٠ م^{٢}.

٣٣٠٠ هي القيمة العددية للعبارة الرياضية س^{٢} − ٥س عندما تكون قيمة المتغير: س = ٦٠.



* على الرسم مربعان طول ضلع الأكبر س وطول ضلع الأصغر ص.
عبّر عن مساحة الجزء الملوّن بالأخضر بعبارة رياضية.
ما القيمة العددية لهذه العبارة اذا كانت:
س = ١٣ م وَص = ٤ م.

٣) العبارات الرياضية والرموز

■ كيف تكتب العبارة الرياضية التي تمثل مساحة قطع الأرض في المثال ٢ من هذا الدرس لو رمزنا بالرمز ﺃ إلى طول ضلع المربع.

ما هي القيمة العددية لهذه العبارة إذا كانت ﺃ = ٦٠م؟ قارن الجواب بالجواب الذي حصلنا عليه في الفقرة السابقة.

ما رأيك بالجملتين:

س^{٢} − ٥س وَ ﺃ^{٢} − ٥ ﺃ؟

▪ العبارة ٧ أ ب^{٢} تمثل سبعة أضعاف حاصل ضرب عدد رُمز له بالرمز أ ، بمربع عدد اخر رُمز له بالرمز ب.

كيف تكتب هذه العبارة الرياضية لو رمزنا للعدد الأول بالرمز س ، وللعدد الثاني بالرمز ص؟

هل تغيرت العبارة الرياضية؟ وهل تغيرت قيمها العددية؟

لاحظت في النشاط السابق أن الجملتين:

س^{٢} — ٥ س وَ أ^{٢} — ٥ أ من جهة ، وأن الجملتين:
٧ أ ب^{٢} وَ ٧ س ص^{٢} من جهة أخرى تمثلان العبارة الرياضية نفسها، وأن القيمة العددية لهذه العبارة هي نفسها، أيّ كانت رموز المتغيرات في العبارة، وبالتالي:

> إن مضمون العبارات الرياضية لا يتغيّر إذا بدلنا رموز المتغيرات برموز أخرى.

*** ما هي فيما يلي ، العبارات الرياضية التي تبدّلت رموز متغيراتها برموز أخرى:**

س ص − س^{٢} ص^{٣}
٤ أ^{٥} ب^{٣} + ٣ أ ب
أب − أ^{٣} ب^{٢}
أد − ٤ أ^{٣} د^{٥}
٣ س ص + ٤ ص^{٣} س^{٥}
م ن − ٤ م^{٣} ن^{٥}

تمارين :

١) جد القيمة العددية للعبارة الرياضية :

٤ أ^{٢} ب^{٣} + (ب − أ)^{٢} .

في كل من الحالات التالية :

أ = ٢ ، ب = ٣   أ = ١ ، ب = ٢

أ = ٠ ، ب = ١٠   أ = ٢ ، ب = ٢

٢) اذا كان س = ٢ وَ ص = ٥ احسب قيمة كلٍ من العبارات التالية :

أ - ٣ س^{٢} − ٢ ص

ب - س ص − س − ص

جـ - س ص − (س+ص)

د - س^{٢} + ص^{٢}

هـ - ٤ (٣ س − ص) − ٣ (ص − ٢ س)

و - (س^{٤} − ٣ ص) + (ص^{٢} − س^{٣})

ز - س (ص+س) + ص (س + ص)

٣) جد القيم العددية للعبارة ٢ أ إذا كان:

أ ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}

٤)

أ - كيف تعبّر عن عدد زوجي أ؟

ب- عبّر عن العدد الذي يلي أ مباشرة، وعن العدد الذي يسبقه مباشرة.

جـ - عبّر عن العدد الفردي الذي يلي ٢ أ مباشرة، وعن العدد الزوجي الذي يسبق ٢ أ مباشرة.

٥) ب يمثل عددًا كليًا. متى يكون العدد ب + ١ زوجيًا؟ ومتى يكون فرديًا؟

٦)

أ - اكتب العبارة الرياضية التي تعبر عن :

«حاصل ضرب عددين أضيف إليه مجموع هذين العددين».

ب- اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن :

«حاصل ضرب مجموع عددين بالفرق بينهما؟».

٧) إذا كان س عددًا كليًا فعمّا تعبّر كل من العبارات الرياضية التالية:

أ - س (س + ١) (س + ٢) (س + ٣)

ب- س^{٢} (س + ١)^{٢}

جـ- س + س^{٢} + س^{٣} + س^{٤}

د - س^{٢} + (س + ١)^{٢} + (س − ١)^{٢}

٨) ط وَ ع يمثلان طول مستطيل وعرضه.

أ - اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن محيط المستطيل.

ب- اكتب العبارة الرياضية التي تعبّر عن مساحة المستطيل.

الدّرس الثاني: المعادلات في مجموعة الأعداد الكليّة

١) المعادلات ذات المجهول الواحد

▲ **مثال ١ :** س هو متغير في مجموعة الأعداد :

م = {٢، ٣، ٤، ٧، ٩، ١٥} ، وَ ٢س +٥ =١٣ هي جملة يمكن أن تكون صحيحة إذا **عوّضنا** عن س بإحدى القيم التي تأخذها في المجموعة م.

■ املأ الجدول التالي، وعيّن القيم التي إذا اخذتها س في م تحقق المساواة :

٢س + ٥ = ١٣

س	٢	٣	٤	٧	٩	١٥
٢ س						
٢ س + ٥						

لاحظت أن المساواة (٢ س + ٥ = ١٣) تتحقق إذا عوّضنا عن س بالعدد ٤ فقط من المجموعة م.

المجموعة م تسمى **مجموعة التعويض**.

٢ س + ٥ = ١٣ تسمى **معادلة ذات مجهول واحد س** في مجموعة التعويض م.

المجموعة الجزئية ح = {٤} ⊂ م، والتي عنصرها هو العدد ٤ الذي يحقق المساواة، تسمى **مجموعة الحل في مجموعة التعويض** م.

العدد ٤ هو **حل** للمعادلة.

▲ **مثال ٢**: ص هو متغيّر في المجموعة: **ب** = {٢، ٣، ٥، ٨، ٩}.

■ املأ الجدول التالي وعيّن القيم التي إذا أخذها ص في **ب** تحقق المساواة:

٧ ص − ١٠ = ص^{٢}

ص	٢	٣	٥	٨	٩
٧ ص					
٧ ص − ١٠					
ص^{٢}					

لاحظت أن المساواة (٧ ص − ١٠ = ص^{٢}) تتحقق إذا عوّضنا عن ص بأحد العددين (٢ أو ٥) من المجموعة **ب**.

٧ ص − ١٠ = ص^{٢} هي معادلة ذات مجهول واحد.

ب = {٢، ٣، ٥، ٨، ٩} هي مجموعة التعويض.

ح = {٢، ٥} ⊂ **ب** هي مجموعة الحلّ.

العدد ٢ هو حل للمعادلة. العدد ٥ هو أيضًا حلّ للمعادلة.

▲ **مثال ٣** : المعادلة ذات المجهول الواحد هي :

س + ١ = ٧

مجموعة التعويض هي: ع = {٢، ٣، ٥ }

■ املأ الجدول التالي للحصول على حلول المعادلة :

س			
س + ١			

* **جد مجموعة حلّ المعادلة :**
(س+١)^{٢} = س^{٢} + ٢س + ١
في مجموعة التعويض :
ت = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦ }.
ماذا تلاحظ ؟

لاحظت أن أيّاً من الأعداد : ٢ ، ٣، ٥ ليس حلاً للمعادلة س+١=٧ في مجموعة التعويض ع .

مجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية ϕ.

نقول في هذه الحال إن المعادلة (س+١=٧) هي **مستحيلة الحل** في مجموعة التعويض {٢، ٣، ٥ }.

ملاحظة : إذا غيّرنا في المثال ٣ مجموعة التعويض لتصبح:
{٢، ٣، ٥، ٦ }
نجد أن العدد ٦ من مجموعة التعويض الجديدة هو حل للمعادلة (س + ١ = ٧).

من هنا أهمية تحديد مجموعة التعويض بالنسبة لمعادلة معطاة.

٢) خصائص علاقة التساوي في ك

■ جد حلول المعادلة :

س^{٢} + ٢ − ٣س = ٠

في مجموعة التعويض: {٠، ١، ٢، ٣}

■ هل يمكنك القيام بعمل مشابه بالنسبة للمعادلة نفسها إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الكلية **ك**؟ لماذا؟

لاحظت في النشاط السابق عدم تمكّنك من تحديد حلول المعادلة (س^{٢} + ٢ − ٣س = ٠) في **ك** بطريقة التجربة المعتمدة في الأمثلة السابقة، وذلك راجع إلى أن المجموعة **ك** هي مجموعة غير منتهية، وليس باستطاعتك تجربة جميع عناصرها لمعرفة الحلول منها.

من هنا ضرورة دراسة خصائص علاقة التساوي في **ك** لتحويل معادلات معطاة إلى معادلات **مكافئة** لها الحلول نفسها، وتمكّننا من إيجاد الحلول دون الاعتماد على الطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة.

المساواة والجمع والطرح: المساواة ٲ = ب تقرأ (ألف يساوي باء) وتعني أن ٲ وَ ب رمزان للعدد نفسه. ٲ يمثل الطرف الأيمن من المساواة، ونسميه **الطرف الأول**، وَ ب يمثل الطرف الأيسر ونسميه **الطرف الثاني**.

العدد ٲ+١ هو العدد الذي يلي ٲ مباشرة، والعدد ب +١ هو العدد الذي يلي ب مباشرة. وبما أن ٲ وَ ب يرمزان للعدد نفسه، فإن:

ٲ + ١ = ب + ١

كذلك يمكننا إضافة العدد واحد إلى طرفي المساواة الجديدة، فنحصل على:

(ٲ + ١) + ١ = (ب + ١) + ١

أو ٲ + ٢ = ب + ٢

ولو كررنا العملية السابقة جـ مرة لحصلنا على:

$$أ + جـ = ب + جـ$$

ولو طرحنا من المساواة الأخيرة العدد واحد ، وكررنا ذلك جـ مرة ، لعدنا من جديد إلى المساواة : أ = ب ، وبالتالي نستنتج :

إذا كان : أ ∈ ك ، ب ∈ ك وَ جـ ∈ ك
فإن : أ = ب تكافئ أ + جـ = ب + جـ

وهذا معناه أننا نحصل على المساواة الثانية إذا أضفنا إلى طرفي المساواة الأولى العدد جـ ، كما نحصل على المساواة الأولى إذا طرحنا من طرفي المساواة الثانية العدد جـ .

المساواة والضرب والقسمة : سنثبت الآتي :

أ = ب تكافئ جـ أ = جـ ب (جـ ≠ ٠).

■ تتبّع الخطوات التالية ، وأعط الحجج التي تبررها ، علمًا بأن جـ ≠ ٠ :

١) أ = ب	١) جـ أ = جـ ب
٢) أ − ب = ٠	٢) جـ أ − جـ ب = ٠
٣) جـ (أ − ب) = ٠	٣) جـ (أ − ب) = ٠
٤) جـ أ − جـب = ٠	٤) أ − ب = ٠
٥) جـ أ = جـب	٥) أ = ب

من النشاط السابق نستنتج :

*** لماذا إذا كان : أ ∈ ك ، ب ∈ ك ، جـ ∈ ك وَ جـ ≥ أ فإن :**
أ = ب تكافئ :
أ − جـ = ب − جـ

*** كيف تنتقل من :**
٣ س + ٧ = ٢٢
إلى ٣ س + ١٠ = ٢٥ ،
وَ إلى ٣ س = ١٥ ؟

إذا كان $ا \in$ **ك**، ب $\in$ **ك**، جـ $\in$ **ك** وَجـ $\neq$.

فإن: ا = ب تكافئ جـ ا = جـ ب.

وهذا معناه أننا نحصل على المساواة الثانية إذا ضربنا طرفي المساواة الأولى بالعدد جـ ، كما نحصل على المساواة الأولى إذا قسمنا طرفي المساواة الثانية على العدد جـ.

* **لماذا إذا كان:**
ا $\in$ ك، ب $\in$ ك، جـ $\in$ ك
وَ جـ قاسم لـ ا
فإن:
ا = ب تكافئ
ا ÷ جـ = ب ÷ جـ

٣) حل المعادلات من الدرجة الأولى في ك

■ تتبّع الخطوات التالية، وأعط في كل مرة الحجج التي تبرّر الانتقال من خطوة إلى أخرى:

٣ س = س + ٨
٢ س + س = س + ٨
٢ س = ٨
س = ٤

* **كيف تنتقل من:**
٣س = ١٥
إلى ٦ س = ٣٠،
وَ إلى س = ٥؟

■ هل المعادلة (٣ س = س + ٨) تكافئ المعادلة (س = ٤)، أي هل لها الحلول نفسها؟ ولماذا؟

■ ما هي مجموعة حل المعادلة (٣ س = س + ٨) في مجموعة التعويض **ك**؟

في النشاط السابق انتقلت من المعادلة (٣ س = س + ٨) في مجموعة التعويض **ك** إلى المعادلة (س = ٤)، ووجدت مجموعة الحل: ح = {٤}.
وقد قمت بعمليات تسمح لك في كل مرة الانتقال من معادلة إلى معادلة مكافئة لها، وذلك باستعمالك خصائص علاقة التساوي في **ك**.

المعادلة السابقة (٣ س = س + ٨) تسمى **معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد في ك**.

وفيما يلي بعض الأمثلة عن هذه الأنواع من المعادلات :

▲ **مثال ١** :

٤ س = س + ١٢

٣ س + س = س + ١٢ (حلّلنا ٤ س إلى ٣ س + س)

٣ س = ١٢ (طرحنا س من الطرفين)

س = ٤ (قسمنا الطرفين على ٣).

مجموعة الحل هي {٤}.

من المستحسن التحقق دائمًا من صحة الحل ، وذلك بالرجوع إلى المعادلة المعطاة ، والتعويض عن س بالعدد الذي حصلنا عليه :

٤ × ٤ = ٤ + ١٢

١٦ = ١٦

▲ **مثال ٢** :

٣ (س + ٤) = ١٨

٣ (س + ٤) = ٣ × ٦ (حلّلنا ١٨ إلى ٣ × ٦)

س + ٤ = ٦ (قسمنا الطرفين على ٣)

س + ٤ = ٢ + ٤ (حلّلنا ٦ إلى ٢ + ٤)

س = ٢ (طرحنا ٤ من الطرفين)

مجموعة الحل هي {٢}.

التحقق من الجواب :

٣ (٣ + ٤) = ١٨

٣ × ١٦ = ١٨

١٨ = ١٨

▲ **مثال ٣ :**

٦ س − ٧ = ٢ س

٦ س = ٢ س + ٧ (أضفنا ٧ إلى الطرفين)

٤ س = ٧ (طرحنا ٢ س من الطرفين)

وبما أن ٧ لا تقبل القسمة على ٤ ، فلا يوجد عدد كلي س ، بحيث إن ٤ س = ٧ .

مجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية ϕ ، والمعادلة مستحيلة في **ك**.

▲ **مثال ٤ :**

٣ س + ٦ = ٢ س + ٤

س + ٦ = ٤ (طرحنا ٢ س من الطرفين)

س + ٢ = ٠ (طرحنا ٤ من الطرفين)

لا يوجد أي عدد كلي إذا جمعناه مع ٢ كان الحاصل صفرًا.

فمجموعة الحل هي إذن ϕ ، والمعادلة مستحيلة في **ك**.

ملاحظة : يمكن اتباع احدى الطريقتين التاليتين لحل المعادلة :

٥ س − ٤ = ٣ س + ٢

الطريقة الأولى : ٢ س − ٤ = ٢

٢ س = ٦

س = ٣

أو

* بيّن لماذا المعادلات التالية هي مستحيلة في ك:

س + ٤ = ٠

٢ س = ٩

س + ١١٢ = ٠

٣ س = ٩٧١

أعط أمثلة أخرى عن معادلات مستحيلة في ك.

الطريقة الثانية : ٥ س = ٣ س + ٦
٢ س = ٦
س = ٣

في الطريقة الأولى بدأنا بحذف المجهول س من الطرف الثاني ، ثم حذفنا الأعداد المعلومة من الطرف الأول.

في الطريقة الثانية بدأنا بحذف الأعداد المعلومة من الطرف الأول ، ثم حذفنا المجهول من الطرف الثاني.

وفي كلتا الحالتين وجدنا الحل نفسه.

حلّ معادلة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد في ك أقوم بما يلي :
١) أحذف الأعداد المعلومة من أحد الأطراف.
٢) أحذف المجهول من الطرف الاخر.

تمارين

١) جد مجموعة الحل للمعادلة : س^{٣} + ٣ = ٤ س
في كل من مجموعات التعويض التالية :
ت$_{١}$ = {٠، ١، ٢ }، ت$_{٢}$ = {٠، ١، ٢، ٣ }،
ت$_{٣}$ = {٤، ٥، ٦، ٧ }.

٢) أ وَ ب عددان كليان بحيث إن: أ+٣= ب+٢.
أ – أي العددين أكبر : أ أم ب؟ وبكم؟
ب– هل المساواة (أ + ٦٥ = ب + ٦٤) صحيحة؟
ولماذا؟
جـ – هل المساواة (٦ أ + ١٨ = ٦ ب + ١٢)
صحيحة؟
ولماذا؟
د – هل المساواة (٥ أ + ١٨ = ٥ ب + ١٣)
صحيحة؟ ولماذا؟
هـ – احسب س كي تكون المساواة التالية صحيحة :
٩ أ + ٢٧ = ٩ ب + ٦ س

٣) أ وَ ب ∈ ك
أ – ماذا تستنتج من أ ب = ٠؟
ب– ماذا تستنتج من أ ب = ١؟
جـ – ماذا تستنتج إذا كان :
أ ب = ٥، أ ب = ٧، أ ب = ١١.

٤) (س، ص) ∈ ك × ك. ما هي القيم الممكنة لـ س وَ ص، إذا كان س ص = ٣٦؟

٥) جد في ك مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية :
س + ٥ = ١٦
٨ – س = س – ٢
٥ س + ٤ = س + ٢٤
٤ (س + ٢) = ٣ (٣ س + ١)
س + ٣ (س + ٤) = ٤ س + ١٢
٣ (س + ٢) – ٣ = ٢ (س – ٣)
(س – ٢) (س – ٣) = ٠
(س + ١) (س – ٥) = ٠

٦) جد في ك مجموعة الحل دون كتابة، معتمدًا على عمليات ذهنية :
٥ (س + ١) = ٢٠ ، ٢ س + ١٠ = ٢٠
٣ (س + ٢) = ١٢ ، ١٠ س + ٢٠ = ٨٠
١٥ – ٢ س = ٩ ، ١٠ س + ١٠ = ٢٠٠

٧) احسب في ك قيمة س، ثم قيمتي ص وَع في المعادلة (س + ص + ع = ١٢) إذا كان :
ص = ٢ س وَع = ٣ س.

٨) إذا كان ص = ٣ فجد في ك قيمة س، في المعادلة :
ص^{٢} س + ص = (ص + ٢)^{٢} – ٢ س

الدّرس الثالث : مسَائل حسَابيّة

كثير من المسائل الحسابية يمكن حلّها بواسطة معادلات من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد. ويتمّ ذلك باتّباع الخطوات التالية :

أ – اختيار المجهول ، وتنظيم المعادلة.

ب– حلّ المعادلة.

جـ– التحقق من صحة الجواب.

وهذه بعض الأمثلة على ذلك :

▲ **مثال ١** : ما هو العدد الذي إذا أضفت خمسة إلى ضعفية حصلت على العدد **٢٥** ؟

أ – اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

ليكن س العدد المطلوب. ضعفا العدد س هو العدد **٢** س.

المعادلة التي تترجم المسألة هي :

٢ س + **٥** = **٢٥**.

ب– حل المعادلة :

٢ س + **٥** = **٢٥**

٢ س = **٢٠** (طرحنا (**٥**) من الطرفين)

س = ١٠ (قسمنا الطرفين على **٢**)

الجواب : العدد المطلوب هو ١٠

جـ – التحقق من صحة الجواب :

ضعفا ١٠ هو العدد ٢٠ . إذا أضفنا إلى ٢٠ العدد ٥ نحصل على ٢٥ . وهذا هو المطلوب .

▲ **مثال ٢** : ما هما عددان الفرق بينهما ١٥ ومجموعهما = ٢٣ ؟

أ – اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

ليكن س العدد الأصغر . العدد الأكبر هو إذن : س + ١٥ .

وبما أن مجموع العددين يساوي ٢٣ ، فالمعادلة التي تترجم المسألة هي :

س + (س + ١٥) = ٢٣

ب – حل المعادلة :

س + (س + ١٥) = ٢٣

٢ س + ١٥ = ٢٣

٢ س = ٨ (لماذا ؟)

س = ٤ (لماذا ؟)

الجواب : العدد الأصغر = ٤ ، والعدد الأكبر = ١٩ .

جـ – التحقق من صحة الجواب :

الفرق بين ١٩ وَ ٤ هو : ١٩ – ٤ = ١٥

مجموع ١٩ وَ ٤ هو : ١٩ + ٤ = ٢٣ .

■ ارمز بالحرف س إلى العدد الأكبر ، ثم نظم المعادلة على هذا الأساس ، وجد الحل .

▲ **مثال ٣**: مع عمر ثلاثة أضعاف ما مع أحمد من الريالات.
أعطى عمر ١٠ ريالات لأحمد، فتساوت نقودهما.
كم ريالاً كان مع كلٍ منهما؟

أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة:
ليكن س عدد الريالات التي مع أحمد.
يكون مع عمر: ٣ س ريالاً.
بعد أن أعطى عمر أحمد ١٠ ريالات بقي معه (٣ س - ١٠) ريالاً،
وأصبح مع أحمد: (س + ١٠) ريالاً.
وبما أن نقود عمر وأحمد أصبحت متساوية، فالمعادلة هي إذن:

٣ س - ١٠ = س + ١٠

ب - حلّ المعادلة:

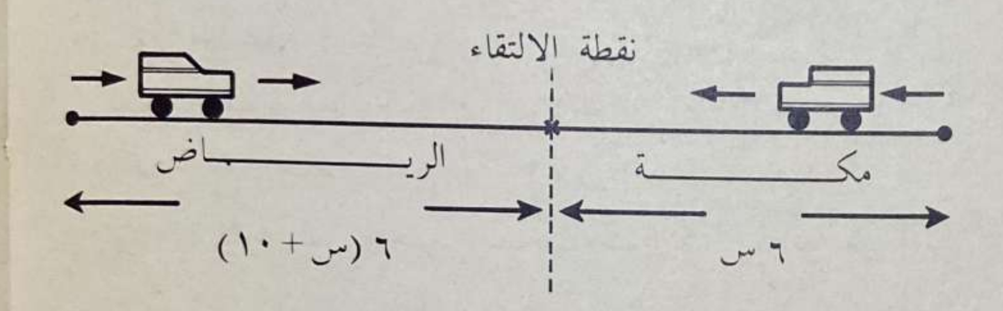
٣ س - ١٠ = س + ١٠
٣ س = س + ٢٠
٢ س = ٢٠
س = ١٠

الجواب: مع أحمد ١٠ ريالات، ومع عمر ٣ × ١٠ = ٣٠ ريالاً.

جـ - التحقق من الجواب
مع أحمد ١٠ ريالات، مع عمر: ٣ × ١٠ = ٣٠ ريالاً. بعد أن أعطى (عمر) أحمد ١٠ ريالات، بقي معه: ٣٠ — ١٠ = ٢٠ ريالاً وأصبح مع عمر: ١٠ + ١٠ = ٢٠ ريالاً.

▲ **مثال ٤** : المسافة بين مكة المكرمة والرياض هي **٩٦٠** كلم. انطلقت سيارة أولى من مكة باتجاه الرياض، وانطلقت سيارة ثانية من الرياض باتجاه مكة.

إذا كانت سرعة السيارة الثانية تزيد عن سرعة السيارة الأولى بـ١٠ كلم/سا، فما هي سرعة كل منهما، إذا التقتا بعد سير ست ساعات؟.



أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

لتكن س سرعة السيارة الأولى.

فتكون سرعة السيارة الثانية : س + ١٠

المسافة التي قطعتها السيارة الأولى : ٦ س

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية : ٦ (س + ١٠)

المسافة التي قطعتها السيارتان : ٩٦٠ كلم

المعادلة هي إذن :

٦ س + ٦ (س + ١٠) = ٩٦٠

ب - حل المعادلة :

٦ س + ٦ (س + ١٠) = ٩٦٠

٦ س + ٦ س + ٦٠ = ٩٦٠

١٢ س = ٩٠٠

س = ٩٠٠ ÷ ١٢

س = ٧٥

الجواب : سرعة السيارة الأولى : ٧٥ كلم / سا.

سرعة السيارة الثانية : ٨٥ كلم/سا.

جـ - التحقق من الجواب :

سرعة السيارة الثانية تزيد عن سرعة الأولى بـ ٨٥-٧٥=١٠ كلم / سا.

المسافة التي قطعتها السيارتان :

٦ × ٧٥ + ٦ × ٨٥ = ٦ (٧٥ + ٨٥)

= ٦ × ١٦٠

= ٩٦٠ كلم.

■ افترض أن سرعة السيارة الثانية هي س.

ما هي سرعة السيارة الأولى؟

نظّم المعادلة على هذا الأساس، وَ جد الحل.

▲ **مثال ٥** : عمر اب ٣٨ سنة وعمر ابنه ١٤ سنة. بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن؟

أ - اختيار المجهول وتنظيم المعادلة :

ليكن س عدد السنوات المطلوبة.

بعد س سنة يصبح عمر الاب : ٣٨ + س

بعد س سنه يصبح عمر الابن : ١٤ + س

وبما أن عمر الأب سيكون ثلاثة أضعاف عمر الابن بعد س سنة، فالمعادلة هي إذن :

٣٨ + س = ٣ (١٤ + س)

ب – حلّ المعادلة :

٣٨ + س = ٣ (١٤ + س)

٣٨ + س = ٤٢ + ٣ س

٣٨ + س = ٣٨ + ٤ + ٣ س

س = ٤ + ٣ س

س = ٤ + ٢ س + س

٠ = ٤ + ٢ س

٠ = ٢ (س + ٢)

٠ = س + ٢

أو

س + ٢ = ٠

هذه المعادلة هي مستحيلة في **ك**.

النتيجة : لا يمكن أن يصبح عمر الأب ثلاثة اضعاف عمر الابن.

■ أعد حل المسألة علمًا بأن ما هو مطلوب الان هو التالي :

قبل كم سنة كان عمر الاب ثلاثة اضعاف عمر الابن؟

تمارين :

١) قبض عامل أجرته عن ١٠ أيام عمل، وكان معه ٨٥ ريالاً.
إذا صرف ٤٠ ريالاً، وبقي معه ٣٤٥ ريالاً، فما هي اجرته اليومية؟

٢) عدد مؤلف من رقمين: رقم آحاده يزيد عن رقم عشراته باثنين.
ما هو هذا العدد إذا كان مجموع رقميه ١٤؟

٣) يزيد عمر أب عن عمر ابنه ٢٧ سنة. قبل ١١ سنة كان عمر الأب ٤ أضعاف عمر الابن.
ما هو عمر كل منهما الان؟

٤) في القسمة الإقليدية لعدد على اخر كان خارج القسمة ٣، والباقي ٥. إذا كان المقسوم ٥٦، فما هو المقسوم عليه؟

٥) مجموع عمري زياد وَ وليد ٤٩ سنة. منذ ٨ سنوات كان عمر زياد ضعفي عمر وليد.
ما هو عمر كل منهما الآن؟

٦) خرج تلاميذ الصف إلى الملعب وتوزعوا ثلاث فرق:
الفرقة الأولى تزيد عن الفرقة الثانية بأربعة تلاميذ، وتنقص عن الثالثة بخمسة تلاميذ.
ما هو عدد التلاميذ في كل فرقة إذا كـان في الصف ٣١ تلميذاً.

٧) باع مزارع ٤٩ بيضة على دفعتين.
إذا كان ما باعه في الدفعة الأولى يزيد عما باعه في الدفعة الثانية بسبع بيضات، فكم بيضة باع في كل دفعة؟

٨) أربعة أضعاف عدد تساوي ثلاثة أضعاف العدد الذي يليه مباشرة.
ما هو هذا العدد؟

٩) مجموع ثلاثة أعداد متتالية يساوي ٤٥.
ما هي هذه الأعداد؟

١٠) لدى هشام ٥ ريالات زيادة عما لدى سعيد.
أربعة أضعاف ما لدى هشام زائد ثلاثة أضعاف ما لدى سعيد تساوي ٧٦ ريالاً. كم ريالاً لدى كل منهما؟

١١) مع محمود وقاسم ٦٥ ريالاً. أعطينا محمود ٤ ريالات، وأعطينا قاسم ٣ ريالات فأصبح مع محمود ثلاثة أضعاف ما مع قاسم.
كم ريالاً كان مع كل منهما؟

١٢) قسّم مبلغ ١٨٠ ريالاً بين ثلاثة أشخاص، بحيث أخذ الأول ٥ ريالات زيادة عن الثاني، وأخذ الثالث ١٠ ريالات زيادة عن الأول والثاني معًا.
ما هي حصة كل من الثلاثة؟

١٣) سافر مروان مدة أربعة أيام ومعه ٣٨٠ ريالاً. وعاد ومعه ٥ ريالات.
كان ينفق في كل يوم ضعفي ما كان ينفقه في اليوم الذي يسبقه.
كم كان مصروفه في كل يوم من الأيام الأربعة؟

١٤) بستان مستطيل الشكل طول محيطه ١٨٠م. لو زاد عرضه ٥ أمتار ونقص طوله ٥ أمتار لأصبح مربع الشكل.
ما هي مساحة هذا البستان؟

الدّرس الرابع : المتراجحات في مجموعة الأعداد الكلّيّة

١) المتباينات

نعلم أن الرمز $>$ يعني «أكبر من»، وأن الرمز $<$ يعني «أصغر من».

نقول مثلاً إن العدد ٩ هو أكبر من العدد ٧، ونكتب ٩ $>$ ٧. ونقول أيضًا: إن العدد ٧ هو أصغر من العدد ٩، ونكتب: ٧ $<$ ٩.

٩ $>$ ٧ تسمّى **متباينة**. ٩ هو **طرفها الأول** وَ ٧ **طرفها الثاني**. كذلك ٧ $<$ ٩ تسمّى **متباينة**. ٧ هو **طرفها الأول** وَ ٩ **طرفها الثاني**.

وكلتا المتباينتين تعني أن عملية طرح الأصغر من الأكبر هي عملية ممكنة في مجموعة الأعداد الكلية **ك**، وأن (٩−٧) هو عدد كلي أكبر من الصفر، وَ هو الفرق بين الأكبر والأصغر.

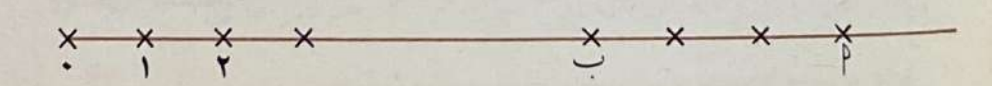
وعلى العموم إذا كان أ وَ ب عددين كليين فإن:

أ $>$ ب تعني ب $<$ أ

والعكس بالعكس. وكل واحدة من المتباينتين تعني أن أ − ب هو عدد كلي أكبر من الصفر.

■ تعلم أن أ $>$ ب تعني أن أ هو على يمين ب عند ترتيب الأعداد على خط مستقيم.

لاحظ الرسم أدناه واحسب أ−ب، ثم املأ الفراغات باختيارك المناسب من الرموز التالية: ($>$)، ($<$)، (=):



أ ...... ب ، أ + ١ ...... ب + ١

ب ...... أ ، أ − ٣ ...... ب + ٢

أ − ٢ ...... ب + ١ ، أ ...... ب + ٣

■ اكتب المتباينات الحاصلة من مقارنة الأعداد التالية، وعيّن الفرق في كل مرة :

٨ وَ ١٧ ، س وَ (س + ٣)، (ب + ١) وَ (ب − ١)

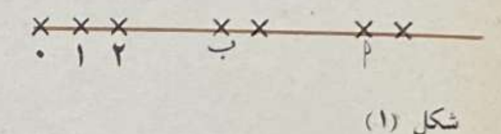
٢٥ وَ ٤ ، (س + ٦) وَ (س + ٢) ، (ب−٤) وَ (ب + ٥).

٢) خصائص المتباينات

المتباينة والجمع والطرح : العدد (أ + ١) هو العدد الذي يلي أ مباشرة، والعدد (ب+١) هو العدد الذي يلي ب مباشرة.

نلاحظ على الشكل ١ أنه إذا كان : أ > ب ، فإن :

أ + ١ > ب + ١



شكل (١)

كذلك يمكننا إضافة العدد واحد إلى طرفي المتباينة الجديدة، فنحصل على :

(أ + ١) + ١ > (ب + ١) + ١

أو :

أ + ٢ > ب + ٢

ولو كررنا العملية السابقة جـ مرة ، لحصلنا على :

أ + جـ > ب + جـ

ولو طرحنا من المتباينة الأخيرة العدد واحد ، وكررنا ذلك جـ مرة ، لعدنا من جديد إلى المتباينة (أ > ب).

وبالتالي نستنتج :

إذا كان : أ ∈ ك، ب ∈ ك وَجـ ∈ ك
فإن : أ > ب تكافئ أ + جـ > ب + جـ

وهذا معناه أننا نحصل على المتباينة الثانية إذا أضفنا إلى طرفي المتباينة الأولى العدد جـ، كما نحصل على المتباينة الأولى اذا طرحنا من طرفي المتباينة الثانية العدد جـ.

* لماذا إذا كان :
أ ∈ ك، ب ∈ ك
جـ ∈ ك وَجـ ⩽ ب
فإن :
أ > ب تكافئ
أ - جـ > ب - جـ

المتباينة والضرب والقسمة : سنثبت أن :
أ > ب تكافئ جـ أ > جـ ب (جـ ≠ ٠).

■ تتبّع الخطوات التالية، وأعط الحجج التي تبرّرها، علمًا بأن جـ ≠ ٠

١) أ > ب	١) جـ أ > جـ ب
٢) أ - ب > ٠	٢) جـ أ - جـ ب > ٠
٣) جـ (أ - ب) > ٠	٣) جـ (أ - ب) > ٠
٤) جـ أ - جـ ب > ٠	٤) أ - ب > ٠
٥) جـ أ > جـ ب	٥) أ > ب

* كيف تنتقل من :
٣ س + ٥ > ١٠
إلى ٣ س + ٨ > ١٣؟
وَ إلى ٣ س > ٥

من النشاط السابق نستنتج :

إذا كان أ ∈ ك، ب ∈ ك، جـ ∈ ك وَجـ ≠ ٠
فإن : أ > ب تكافئ جـ أ > جـ ب.

* لماذا إذا كان :
أ ∈ ك، ب ∈ ك جـ ∈ ك
وَ جـ قاسمًا مشتركًا لـ أ وَ ب.
فإن :
أ > ب تكافئ
أ ÷ جـ > ب ÷ جـ

* كيف تنتقل من:
٨ س < ١٦
إلى ٢٤ س < ٤٨؟
وَ إلى س < ٢؟

وهذا معناه أننا نحصل على المتباينة الثانية إذا ضربنا طرفي المتباينة الأولى بالعدد جـ. كما نحصل على المتباينة الأولى إذا قسمنا طرفي المتباينة الثانية على العدد جـ.

٣) متراجحات الدرجة الأولى ذات المجهول الواحد

▲ **مثال ١**: س هو متغيّر في مجموعة الأعداد:

م = {٢، ٣، ٥، ٨، ١٠}

وَ ٢س + ١ < ١٥، هي جملة يمكن أن تكون صحيحة إذا **عوّضنا** عن س بإحدى القيم التي تأخذها في المجموعة م.

■ املأ الجدول التالي، وعيّن القيم التي إذا أخذتها س تحققت المتباينة:

٢ س + ١ < ١٥

س	٢	٣	٥	٨	١٠
٢ س					
٢ س + ١					

لاحظت أن المتباينة (٢ س + ١ < ١٥) تتحقق إذا عوّضنا عن س بأحد الأعداد: ٢، ٣، ٥ فقط من المجموعة م.

المجموعة م تسمّى مجموعة التعويض.

(٢ س + ١ < ١٥) تسمى **متراجحة من الدرجة الأولى ذات مجهول واحد** س في مجموعة التعويض م.

المجموعة الجزئية ح = {٢، ٣، ٥} ⊂ م ، والتي عناصرها هي الأعداد التي تحقق المتباينة، تسمّى **مجموعة الحل**.

كل من الأعداد (٢، ٣، ٥) هو **حل** للمتراجحة.

▲ **مثال ٢** : ص هو متغيّر في المجموعة :

ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

■ املأ الجدول التالي، وعيّن القيم التي إذا اخذها ص في **ب** تحققت المتباينة :

٣ ص − ٢ > ٧

ص	١	٢	٣	٤	٥	٦
٣ ص						
٣ ص − ٢						

لاحظت أن المتباينة (٣ ص − ٢ > ٧) تتحقق إذا عوّضنا عن ص بأحد الأعداد (٤، ٥، ٦).

(٣ص − ٢ > ٧) هي متراجحة ذات مجهول واحد ص.

ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} هي مجموعة التعويض.

ح = {٤، ٥، ٦} ⊂ **ب** هي مجموعة الحل.

كل من الأعداد (٤، ٥، ٦) هو حل للمتراجحة.

▲ **مثال ٣** : املأ الجدول التالي ، وعيّن القيم التي إذا أخذتها س في المجموعة :

م = {٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ }

تحقق المتباينة :

٢ س + ١ < ١٥

س					
٢ س					
٢ س + ١					

لاحظت أن أيّاً من الأعداد (٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢) ليست حلاً للمتراجحة :

٢ س + ١ < ١٥

مجموعة الحل هي إذن المجموعة الخالية ϕ.

نقول في هذه الحال : إن المتراجحة (٢ س + ١ < ١٥) هي مستحيلة في مجموعة التعويض {٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢ }.

ملاحظة : لو عدنا إلى المثل ١ لرأينا بأن المتراجحة نفسها كانت لها الحلول (٢ ، ٣ ، ٥) في مجموعة التعويض {٢، ٣، ٥، ٨، ١٠ }.

من هنا أهمية تحديد مجموعة التعويض بالنسبة لمتراجحة معطاة.

٤) حل المتراجحات من الدرجة الأولى في ك

س متغيّر في المجموعة :

م = {٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

■ جد ، باتّباعك الأمثلة السابقة ، حلول المتراجحة :

٢س + ٥ < ٧

في مجموعة التعويض م .

■ هل يمكنك القيام بعمل مشابه بالنسبة للمتراجحة نفسها إذاكانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الكلية ك؟ لماذا؟

لاحظ في النشاط السابق عدم تمكّنك من تحديد حلول المتراجحة (٢س+٥ < ٧) في المجموعة ك وبالطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة ؛ وذلك راجع إلى أن المجموعة ك هي مجموعة غير منتهية، وليس باستطاعتك تجربة جميع عناصرها لمعرفة الحلول منها.

في هذه الحال نستعمل خصائص علاقة التباين في ك لتحويل متراجحات معطاة إلى متراجحات **مكافئة** ، لها الحلول نفسها، وتمكننا من إيجاد هذه الحلول دون الاعتماد على الطريقة المعتمدة في الأمثلة السابقة.

وإليك بعض الأمثلة :

▲ **مثال ١** :

٤س − ٧ < س + ٥

٤س − ٧ + ٧ < س + ٥ + ٧ (أضفنا ٧ إلى الطرفين)

٤س < س + ١٢ .

٣س + س < س + ١٢

٣س < ١٢ (طرحنا س من الطرفين)

٣س < ٣ × ٤

س < ٤ (قسمنا الطرفين على ٣)

مجموعة الحل هي :

ح = {٠، ١، ٢، ٣} .

▲ **مثال ٢ :**

س + ٧ ≥ ٢ س

س + ٧ ≥ س + س

٧ ≥ س (طرحنا س من الطرفين)

أو س ≤ ٧

مجموعة الحل هي :

ح = {٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، .... } ،

وهي مجموعة غير منتهية .

▲ **مثال ٣ :**

٣ س + ١٦ < س + ١٢

٣ س + ١٢ + ٤ < س + ١٢

٣ س + ٤ < س (طرحنا ١٢ من الطرفين)

٢ س + س + ٤ < س

٢ س + ٤ < ٠ (طرحنا س من الطرفين)

س + ٢ < ٠ (قسمنا الطرفين على ٢)

مجموعة الحل هي المجموعة الخالية φ .

▲ **مثال ٤ :**

٥ س + ٣ ≤ ٣ س + ٦

٥ س ≤ ٣ س + ٣ (طرحنا ٣ من الطرفين)

٢ س ≤ ٣ (طرحنا ٣ س من الطرفين)

مجموعة الحل هي :

ح = {٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ...... }، وهي مجموعة غير منتهية .

تماريـن

١)

أ – أكمل ما يلي :

١٢ > ٥ لإن ١٢ = ٥ + ...

٩ > ٨ لإن ٩ = ٨ + ...

١ > ٢٠ لإن ٢٠ = ١ + ...

١٤ > ١٦ لإن ١٦ = ١٤ + ...

ب – أكمل ما يلي :

١٢ = ٥ + (١٢ – ٥)

٩ = ٨ + (.... – ....)

٢٠ = ١ + (.... – ....)

١٦ = ١٤ + (.... – ....)

٢) س ∈ ك وَ ص ∈ ك .

اشرح كيف تنتقل من متباينة إلى أخرى :

أ – إذا كان (س ≤ ص) فإن :

(٢ س + ٦ ≤ ٢ ص + ٦) .

ب– إذا كان (س – ٢ > ص – ٢) فإن :

(س + ١ > ص + ١) .

جـ – إذا كان (س + ١ > ٢ ص + ٣) فإن :

٣ س + ٥ > ٦ ص + ١١

٣) جد مجموعة الحل في ك لكل من المتراجحات التالية :

س + ٣ ≤ ٧

٢ س – ٤ > س

٢ س > ٩

س + ٤ > ٤

٢ س + ١ > ٣ س – ٢

٥ (س + ١) ≤ ١٠

٤) إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الزوجية، فجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية :

س + ٤ ≤ ١٠

٤ س > ٢ س + ١٠

س > ٢١

٥ س > ٢٧

٥) إذا كانت مجموعة التعويض هي مجموعة الأعداد الفرديّة فجد مجموعة حل كل من المتراجحات التالية :

س + ٥ > ١٢

٣ س ≤ ٢ س + ١

٣ س + ٥ – س > س + ٩

س + ٣ + ٢ س > ٣ س + ٤

الفصل العاشر :

التناظر حول نقطة والانسحاب والمتجهات

الدرس الأول : التناظر حول نقطة

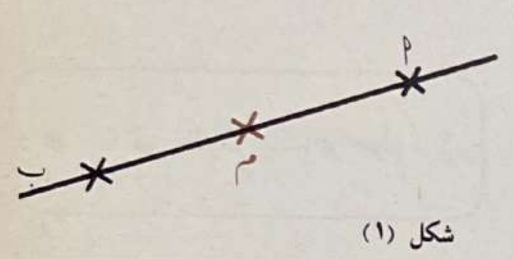
الدرس الثاني : الانسحاب على مستقيم

الدرس الثالث : المتجهات

الدرس الأول : التناظر حول نقطة

١) تناظر نقطتين حول نقطة

■ على الشكل (١) : ا ، م وَ ب ثلاث نقاط على استقامة واحدة، وَ م هي بين ا وَ ب. تحقق من أن ا م ا = ا م ب ا .



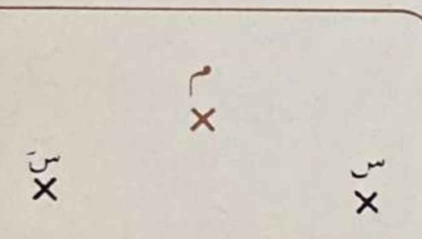
شكل (١)

لاحظت أن م هي منتصف [ا ، ب]. نقول : إن النقطتين ا وَ ب هما **متناظرتان حول** م.

م هي **مركز تناظر** النقطتين ا وَ ب.

ب هي **نظير** ا بالتناظر حول م.

كذلك ا هي نظير ب بالتناظر حول م.



* ا م س ا = ا م سَ ا .
هل س وَ سَ متناظران حول م ؟

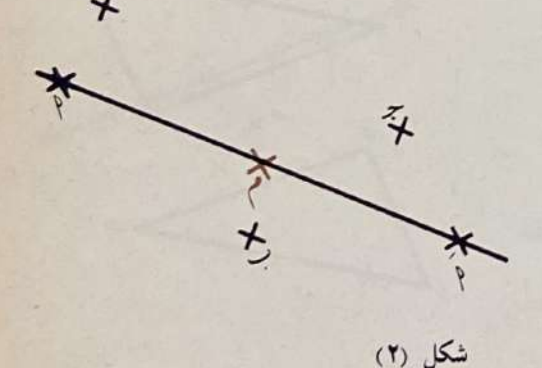
> نقول عن نقطتين ا وَ ب إنهما متناظرتان حول نقطة م ،
> إذا كانت النقطة م هي منتصف القطعة [ا ب].

٢) التناظر حول نقطة في المستوى

■ على الشكل (٢) عيّنا في المستوى النقاط : ا ، ب ، جـ ، د ، اَ وَ م .

تحقق من ان ا وَ اَ متناظرتان حول م .

عيّن نظير كل من النقاط ب ، جـ ، د بالتناظر حول م ، وسمّها بَ ، جـَ ، دَ .



شكل (٢)

■ اختر نقطة هـ من المستوى وعيّن نظيرها هـَ بالتناظر حول م.
ما هو نظير كل من النقاط : أَ، بَ، جـَ، دَ، هـَ بالتناظر حول م.

لاحظت في النشاط السابق اننا إذا اخذنا أية نقطة س من المستوى، نستطيع تحديد نقطة سَ من المستوى، بحيث تكون م منتصف [س سَ] وبالتالي تكون س وَ سَ متناظرتين حول م.

* ما هو نظيرم بالتناظر حول م ؟

التناظر حول نقطة م في المستوى هو عملية تحويل كل نقطة س من المستوى إلى نقطة سَ، بحيث تكون م هي منتصف [س سَ]. النقطة م هي مركز التناظر.

٣) تناظر الأشكال حول نقطة

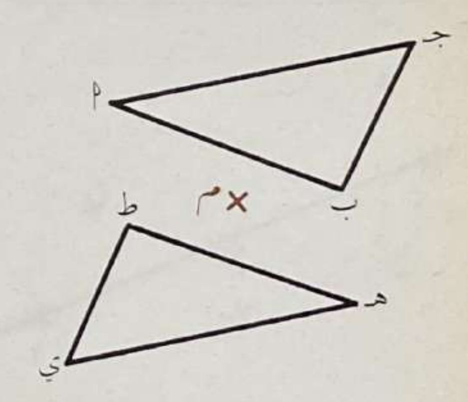
على الشكل (٣) مثلثان أ ب جـ وَ هـ ط ي ونقطة م.

■ تحقّق من أن النقاط : أ، ب، جـ وَهـ، ط، ي، هي متناظرة زوجًا زوجًا بالتناظر حول م.

■ خذ نقطة س على أحد أضلاع المثلث أ ب جـ، وعيّن نظير س بالتناظر حول م. ماذا تلاحظ ؟.

خذ نقطة ص داخل المثلث أ ب جـ. عيّن نظير ص بالتناظر حول م. ماذا تلاحظ ؟

خذ نقطة ع خارج المثلث أ ب جـ. عيّن نظير ع بالتناظر حول م. ماذا تلاحظ ؟



شكل (٣)

نقول : إن المثلثين أ ب جـ وَهـ ط ي هما **متناظران حول م**. نقول أيضًا :

إن م هي **مركز تناظر** الشكلين ﺃ ب جـ وَ هـ ط ي، وإن هـ ط ي هو **نظير** ﺃ ب جـ بالتناظر حول م. وكذلك ﺃ ب جـ هو نظير هـ ط ي بالتناظر حول م.

نقول عن شكلين إنهما متناظران حول نقطة م، إذا كانت كل نقطة من أحدهما متناظرة مع نقطة من الشكل الاخر بالتناظر حول م.

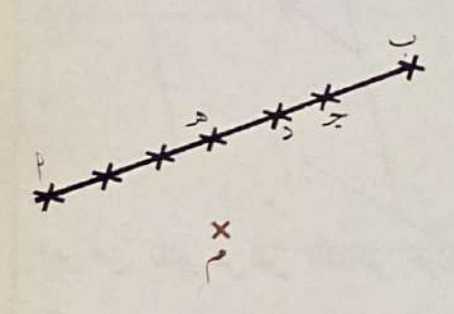
٤) نظير قطعة مستقيم

[ﺃ ب] قطعة مستقيم، م نقطة من المستوى، والنقاط جـ، د، هـ... هي منتمية إلى [ﺃ ب].

■ ارسم نظير كل من النقاط ﺃ، ب، جـ، د، هـ... بالتناظر حول م، وسمّها ﺃَ، بَ، جَ، دَ، هـَ، .....

ماذا تلاحظ بالنسبة لاستقامة النقاط النظيرة؟ ما هو نظير القطعة [ﺃ ب]؟

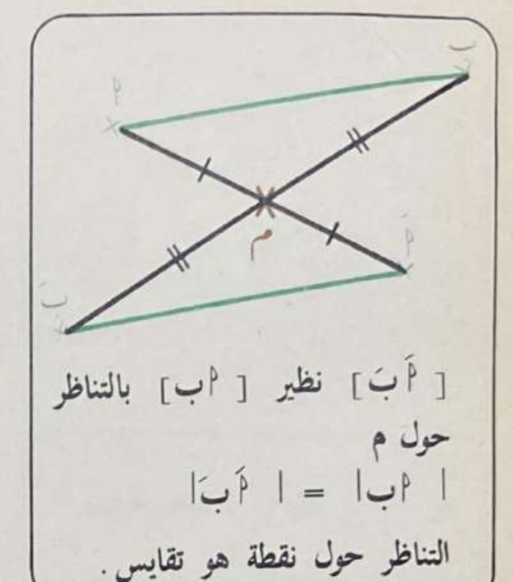
قارن طول [ﺃ ب] بطول نظيرها. ماذا تلاحظ؟



شكل (٤)

في النشاط السابق لاحظت أن نظير قطعة مستقيم هو قطعة مستقيم مطابقة لها، وبالتالي، فإن القطعتين لهما الطول نفسه. وهذه النتيجة صحيحة، أيًّا كانت القطعة، وأيًّا كان وضع مركز التناظر م.

التناظر حول نقطة هو تقايس يحوّل كل قطعة مستقيم إلى قطعة مستقيم لها الطول نفسه.



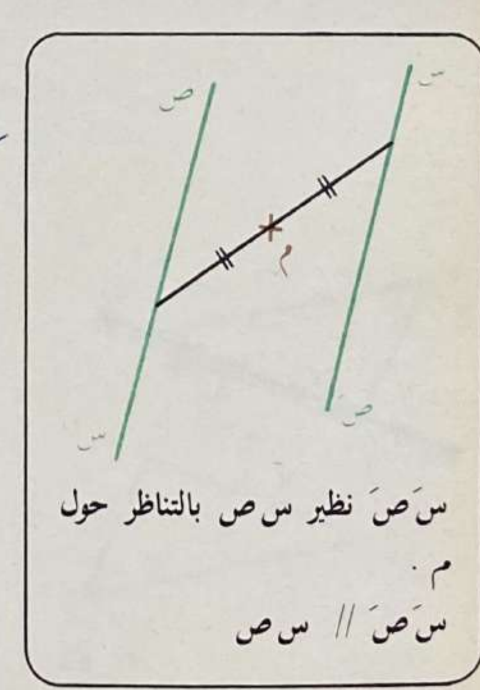
[ٲَبَ] نظير [ٲب] بالتناظر حول م
| ٲب| = | ٲَبَ|
التناظر حول نقطة هو تقايس.

٥) نظير مستقيم

■ ارسم مستقيمًا س ص، وعيّن نقطة م لا تنتمي إليه.
عيّن عدة نقاط منتمية إلى س ص، وحدّد النقاط المتناظرة معها بالتناظر حول م.
تحقّق من أن النقاط النظيرة هي على استقامة واحدة، وسمّ سَ صَ المستقيم الذي تنتمي إليه هذه النقاط. تحقّق من توازي المستقيمين س ص وَ سَ صَ.

من النشاط السابق نستنتج:

التناظر حول نقطة يحوّل كل مستقيم إلى مستقيم موازٍ له.

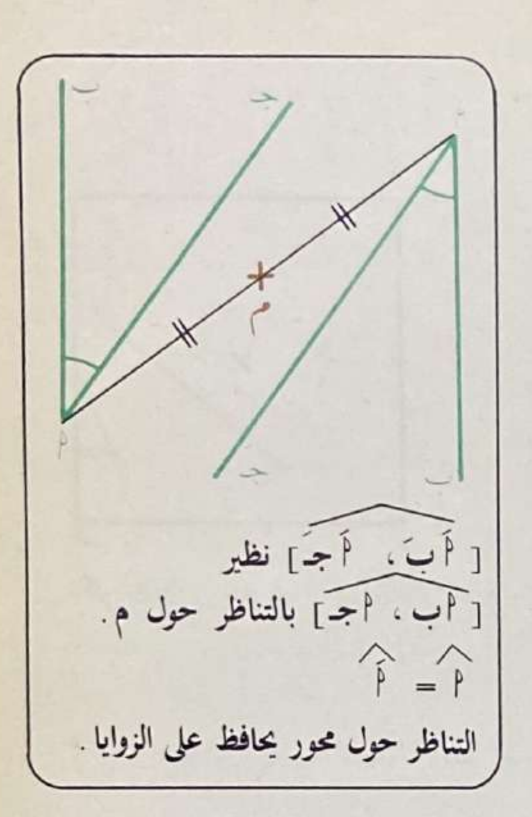


سَ صَ نظير س ص بالتناظر حول م.
سَ صَ // س ص

٦) نظير قطاع زاوي

■ ارسم قطاعًا زاويًا [ٲب، ٲجـ]، وعيّن نقطة م.
ارسم نظير كل من [ٲب وَ [ٲجـ بالتناظر حول م، وسمّها [ٲَبَ وَ [ٲَجـَ.

■ عيّن عدة نقاط منتمية إلى [أب ، أجـ] ، وحدّد النقاط المتناظرة معها بالتناظر حول م. ماذا تلاحظ ؟
ما هو نظير القطاع [أب ، أب] بالتناظر حول م.
تحقّق من تطابق القطاعين [أب ، أجـ] وَ [أَ بَ ، أَجـَ].

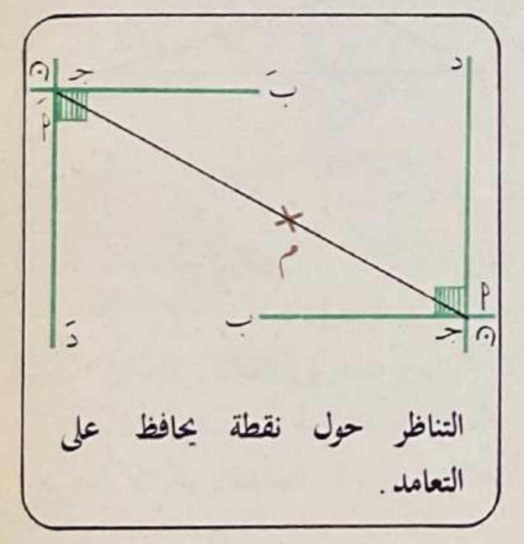


[أَبَ ، أَجـَ] نظير [أب ، أجـ] بالتناظر حول م.
أ^ = أَ^
التناظر حول محور يحافظ على الزوايا.

من النشاط السابق نستنتج :

التناظر حول نقطة يحوّل كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي متطابق معه.
نقول : إن التناظر حول نقطة يحافظ على الزوايا.

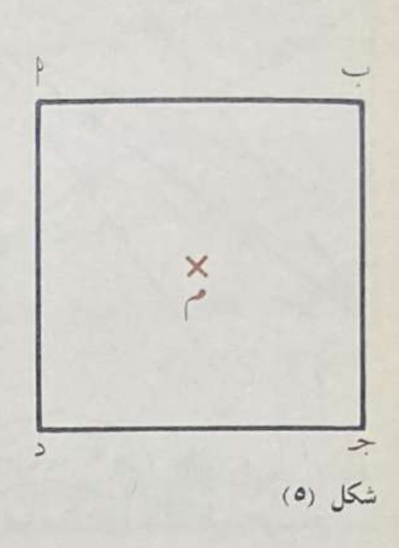
من ناحية أخرى، إذا كان أب وَ جـ د مستقيمين متعامدين متقاطعين في ن (الشكل المجاور) فان نظيريهما بالتناظر حول م هما مستقيمان متوازيان معهما، ومتقاطعان في نَ، وبحيث يكون القطاعان [ن ب ، ن د] وَ [نَ بَ ، نَ دَ] متطابقين. وهذا يعني أن القطاع [نَ بَ ، نَ جـَ] هو قطاع زاوي قائم ؛ لأن [ن ب ، ن د] هو قطاع زاوي قائم. وبالتالي فإن : أَبَ وَ جـَدَ هما مستقيمان متعامدان.



التناظر حول نقطة يحافظ على التعامد.

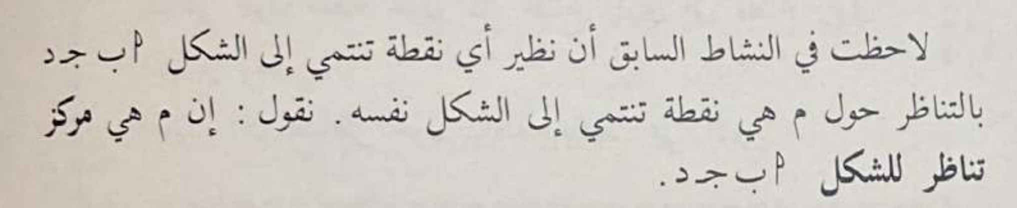
التناظر حول نقطة يحافظ على التعامد، أي إنه يحوّل مستقيمين متعامدين إلى مستقيمين متعامدين.

٧) مركز تناظر شكل



شكل (٥)

■ أ ب جـ د مضلّع ، وَ م نقطة من المستوى (شكل ٥).
تحقق من تناظر أ وَ جـ بالتناظر حول م.
تحقق من تناظر ب وَ د بالتناظر حول م.
ما هو نظير كل من القطع المستقيمة : [أ ب]، [ب جـ]، [جـ د]، [د أ] بالتناظر حول م ؟
خذ أية نقطة تشاء على المضلّع أ ب جـ د، ثم حدّد نظيرها. إلى أي شكل ينتمي هذا النظير؟



لاحظت في النشاط السابق أن نظير أي نقطة تنتمي إلى الشكل أ ب جـ د بالتناظر حول م هي نقطة تنتمي إلى الشكل نفسه. نقول : إن م هي **مركز تناظر للشكل** أ ب جـ د.

وعلى العموم :

نقول عن نقطة م إنها مركز تناظر لشكل ما ، إذا كان نظير كل نقطة من الشكل بالتناظر حول م هو نقطة من الشكل نفسه. ونقول في هذه الحال : إن للشكل المعني مركز تناظر.

تمارين

١)

على المستقيم س ص ، م هي منتصف [أ أَ]
وَ منتصف [ب بَ]. تحقق من ذلك.

أ – بالتناظر حول م :

ماذا تسمي أ وَ أَ ؟ ب وَ بَ

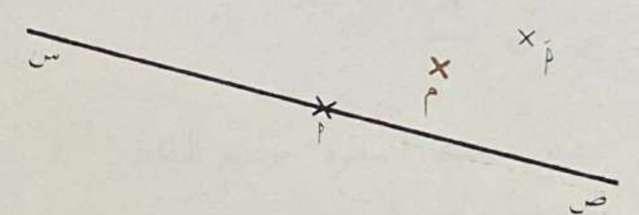
حدد نظير كل من أ ، أَ ، ب ، بَ

حدد نظير القطعة [أ ب].

ما هو نظير المستقيم س ص؟

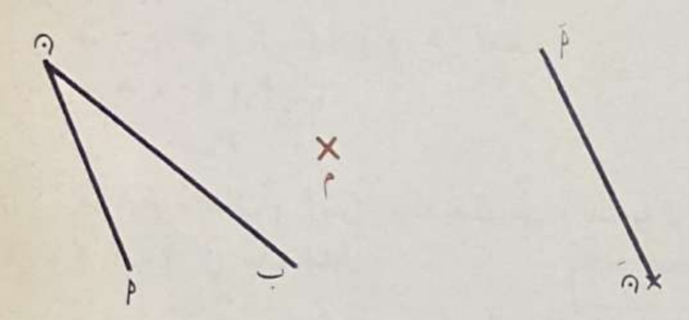
ب– سمّ كل قطعتين متساويتي الطول ، واذكر السبب.

٢) على الرسم التالي : أَ هي نظير أ بالتناظر حول م



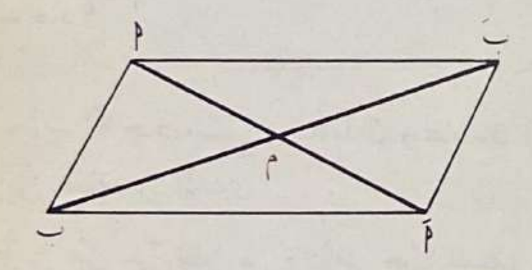
ارسم بدون استعمال الأطوال نظير المستقيم س ص بالتناظر حول م.

٣) على الرسم التالي : جَ وَ[جَ أَ] هما نظيرا ج وَ[ج أ] بالتناظر حول م.



ارسم بدون استعمال الأطوال ، وبطريقتين مختلفتين ، نظير القطاع [ج أ ، ج ب] بالتناظر حول م.

٤) على الرسم التالي النقطة م هي منتصف [أ أَ]
وَ [ب بَ].



أ – بالتناظر حول م :

حدّد نظير كل من أ ، أَ ، ب ، بَ.

حدّد نظير القطعة [أ ب].

ب– سمّ كل قطعتين متساويتي الطول ، واذكر السبب

جـ – سمّ المستقيمات المتوازية ، واذكر السبب.

د – سمّ القطاعات الزاوية المتطابقة ، واذكر السبب.

٥) م هي مركز التناظر ، وَ [أب] قطعة مستقيم.
حدد نظير [أب] في كل من الأحوال التالية :
أ - م ∉ [أب]، وَم ∈ أب.
ب- م ∉ [أب]، وَم ∉ أب.
ج - م ∈ [أب].
د - م = أ.
هـ - م منتصف [أب]. ماذا تقول عن م بالنسبة لـ [أب] في هذه الحال.

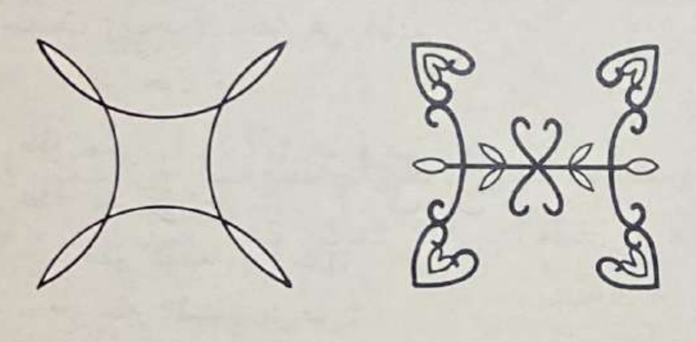
٦) أ ، ب، جـ، د أربع نقاط من المستوى.
أ - حدد النقاط المتناظرة مع أ ، ب، جـ، د حول نقطة ما.

ب - ما هو الشكل المتناظر مع المضلّع أب جـ د؟
جـ - ما هو الشكل المتناظر مع الخط المضلّع أب جـ د؟

٧) أب وَ جـ د مستقيمان متعامدان ومتقاطعان في نقطة م. س نقطة من المستوى.
أ - عيّن سَ نظير س بالتناظر حول المستقيم أب.
ب- عيّن سً نظير سَ بالتناظر حول المستقيم جـ د.
جـ - اثبت ان س وَ سً متناظرتان بالتناظر حول النقطة م.

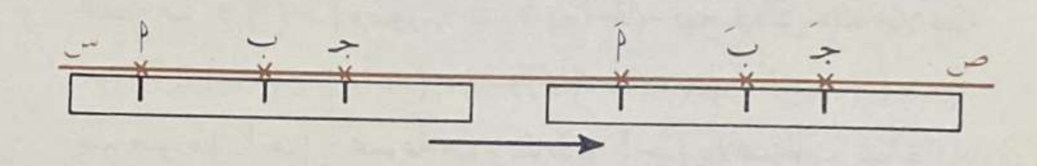
٨) جد مراكز تناظر ما يلي :
أ - قطعة المستقيم [أب].
ب- الزوج من النقاط {جـ ، د }.
جـ - المستقيم س ص.
د - مستقيمين متقاطعين في ع.

٩) جد مراكز تناظر الاشكال التالية :



الدرس الثاني : الانسحاب على مستقيم

١) ماهيّة الإنسحاب



- ارسم مستقيمًا، وسمّه س ص.

عيّن على المستقيم نقاطًا : أ ، ب، جـ، ......

ضع مسطرتك بمحاذاة المستقيم س ص، ثم عيّن عليها إشارات متقابلة مع النقاط : أ ، ب، جـ... كما على الشكل أعلاه.

حرّك المسطرة باتجاه واحد، على ان تلامس باستمرار المستقيم س ص.
توقّف في وضع، وسمّ : أَ ، بَ، جَ النقاط على س ص المقابلة للإشارات التي على المسطرة.

عندما سحبت المسطرة حوّلت النقاط : أ ، ب، جـ الى النقاط : أَ ، بَ ، جَ.

نسمّي العملية **إنسحابًا**. أَ هي **صورة** أ في هذا الانسحاب. كذلك بَ، جَ هما صورتا : ب وَ جـ بالانسحاب نفسه. المستقيم س ص يسمى **حامل الإنسحاب**.

والان : إذا سحبت المسطرة كي تعيدها إلى وضعها الأساسي، تكون قد

ارجعت النقاط : أَ ، بَ ، جَ إلى مواضعها الأساسية : أ ، ب ، جـ فتكون قد اتممت عملية انسحاب اخر ، يسمّى **الإنسحاب المعاكس** للإنسحاب الأول .

■ أجب عن الأسئلة التالية :

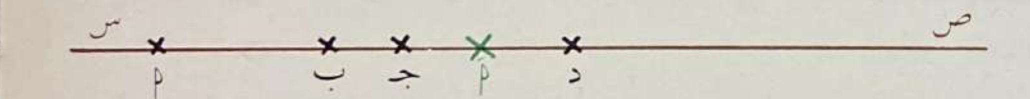
النقطة ب ∈ [أجـ] وصورتها بَ ∈ [أَجـَ]. فهل تنطبق هذه الملاحظة على كل نقطة من [أجـ]، وصورتها؟ تحقّق من ذلك .

سمّ صورة [أجـ] ؛ مجموعة صور نقاط [أجـ] بالإنسحاب السابق . ما هي صورة [أجـ]؟

■ قارن أطوال القطع على الرسم بأطوال صورها بالإنسحاب السابق . ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

> الإنسحاب هو تقايس ، أي إن صورة كل قطعة مستقيم هي قطعة مستقيم لها الطول نفسه .

٢) مقياس الإنسحاب



على المستقيم س ص أربع نقاط : ٲ ، ب ، جـ وَ د... أجرينا انسحابًا على هذا المستقيم، وعيّنا النقطة ٲَ صورة ٲ بهذا الانسحاب.

- لاحظنا في الفقرة السابقة أن الانسحاب هو تقايس.

استخدم هذه الملاحظة كي تعيّن النقاط : بَ ، جـَ ، دَ ؛ صور النقاط ب ، جـ ، د بالإنسحاب السابق.

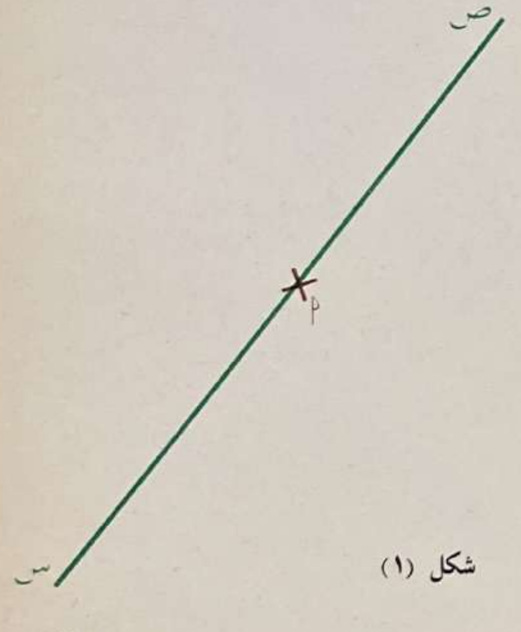
استعمل الفرجار لمقارنة القطع [ٲ ٲَ] ، [ب بَ] ، [جـ جـَ] وَ [د دَ] واذكر ما تلاحظه.

استخدم هذه الملاحظة في تعيين صورة نقطة ما « ي » بالإنسحاب نفسه.

ما هي المسافة بين أية نقطة على س ص وصورتها في هذا الإنسحاب.

لاحظت في النشاط السابق أن المسافة بين أية نقطة من المستقيم س ص، وصورتها بانسحاب معيّن هي مسافة ثابتة.

نسمي هذه المسافة **مقياس الإنسحاب** أو **مقدار** الانسحاب.



شكل (١)

٣) منحى الانسحاب

- طُلبَ منك إجراء انسحاب على المستقيم س ص (شكل ١)، مقياسه ٣ سم.

هل تستطيع تعيين النقطة ٲَ ، صورة ٲ في هذا الانسحاب؟ اذا كان جوابك « نعم » ، فاشرح كيف حصلت على ٲَ. هل ٲَ تنتمي إلى [ٲس أم الى [ٲص؟

إذا كان جوابك « لا » ، فاذكر ماذا ينقص حتى تستطيع تحديد ٲَ بالتمام.

عندما نعرف مقياس انسحاب على مستقيم، فإننا لا نستطيع تحديد الانسحاب بل تنقصنا معرفة **منحى** هذا الإنسحاب. وهذا المنحى هو واحد من الاتجاهين على المستقيم س ص.

من الفقرتين (٢ وَ ٣) نستنتج:

الانسحاب على مستقيم معيّن يحدده عنصران:

١) مقياس الانسحاب، وهو المسافة بين أية نقطة على المستقيم وصورتها.

٢) منحى الانسحاب، وهو واحد من اتجاهي المستقيم.

تماريـن

١) س ص وَ ع ط مستقيمان متقاطعان في نقطة م.
نريد اجراء انسحاب مقياسه ٤ سم.
أ - ماذا يجب أن تعرف حتى تحقّق الانسحاب؟
ب- حامل الانسحاب هو ع ط، فهل تستطيع تعيين صورة م في هذا الانسحاب؟
جـ - ما هي صورة م بانسحاب على ع ط مقياسه ٤ سم ومنحاه اتجاه نصف المستقيم [م ط؟
د - ما هي صورة م بانسحاب على س ص مقياسه ٤ سم، ومنحاه اتجاه نصف المستقيم [م س؟

٢) س ص وَ ع ط مستقيمان متقاطعان في نقطة م.
كم انسحابًا على كل مستقيم، وبمقياس معطى، تستطيع أن تحدد؟
ما هي النقطة م بالنسبة للمضلع الذي رؤوسه هي صور م في هذه الانسحابات؟

الدرس الثالث : المتجهات

١) ماهيّة المتجه

عندما نتكلم عن انسحاب محدّد على مستقيم، يجب أن نحدّد ما يلي :

أ – مقياس الانسحاب وهي المسافة بين نقطة وصورتها .

ب– منحى الانسحاب وهو الاتجاه من نقطة نحو صورتها .

نختصر عادة ذلك في كتابة رمزيّة على الشكل التالي : إذا كانت النقطة ب صورة النقطة ﺃ بالانسحاب، نكتب : الانسحاب $\overleftarrow{\text{ﺃ ب}}$.

فيكون : مقدار الانسحاب | ﺃ **ب** | ، اتجاه الانسحاب من ﺃ نحو ب .

الكتابة الرمزيّة $\overleftarrow{\text{ﺃب}}$ تسمى **متجهًا**:

ﺃ هي **أصل المتّجه**

ب هي **طرف المتّجه**

المستقيم ﺃب هو **حامل المتّجه**

| ﺃب | هو **مقياس المتّجه** .

الاتجاه من ﺃ نحو ب هو **منحى المتّجه** .

ونمثّل المتّجه $\overleftarrow{\text{ﺃب}}$ بقطعة مستقيم، طرفاها ﺃ وَ ب ، واضعين سهمًا عند طرف المتجه ب ، كما هو مبيّن على الشكل (١) .

كثرت الرموز ، وعليّ تذكرها :

ﺃ **ب** : **مستقيم**

[ﺃ **ب**] : **قطعة مستقيم**

[ﺃ **ب** : **نصف مستقيم**

| ﺃ **ب** | : **طول قطعة مستقيم**

$\overleftarrow{\text{ﺃ ب}}$: **متّجه**

شكل (١)

٢) تساوي متجهين

■ ﺃ ، ب ، هـ ، ط ، ي ، د نقاط على المستقيم س ص (شكل ٢). تحقق من أن : | ﺃب | = | جـ د | .

أجرينا الانسحاب الذي يحدّده المتّجه أب. عيّن صور كل نقطة من النقاط: أ، هـ، ط، جـ، ي في هذا الانسحاب.

أجرينا الانسحاب الذي يحدّده المتّجه جـد. ما هي صور النقاط السابقة في هذا الانسحاب؟

أكمل الجدول التالي:

	صورة أ	صورة هـ	صورة جـ	صورة ي
بالانسحاب المحدد بـ أب	ب			
بالانسحاب المحدد بـ جـد			د	

ماذا تلاحظ على الجدول السابق بالنسبة لصورة كل نقطة بالانسحابين؟
هل تنطبق ملاحظتك على أية نقطة من س ص؟

شكل (٢)

لاحظت في النشاط السابق أن المتجهين أب وَجـد يحددان الانسحاب نفسه. نقول: إن المتجهين متساويان ونكتب: **أب = جـد**.

نقول عن متجهين: أب وَجـد إنهما متساويان، عندما يحدّدان الانسحاب نفسه. وعند ذلك يكون لهما:

١) المنحى نفسه.

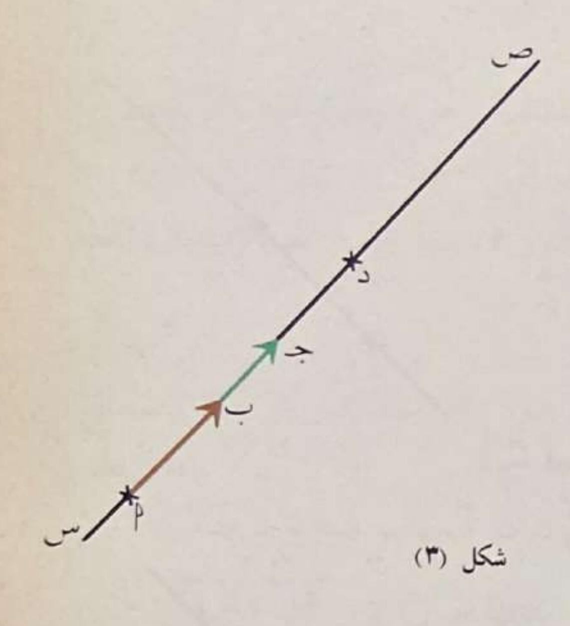
٢) المقياس نفسه، أي | أب | = | جـد |.

ونكتب: أب = جـد

*** جد على الشكل (٢) متجهًا مساويًا لـ أب وَجـد**

٣) تركيب الانسحابات وجمع المتجهات

على المستقيم س ص نقوم بإجراء انسحاب أول محدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ (شكل ٣)، ثم نقوم بإجراء انسحاب ثان محدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.



شكل (٣)

- عيّن صورة د بالانسحاب الأول، وسمّها دَ.

عيّن صورة دَ بالانسحاب الثاني وسمها دً.

ما هي صورة د النهائية بالإنسحابين المتتاليين؟

لو أجرينا منذ البدء الانسحاب المحدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$، فما هي عند ذلك صورة د في هذا الانسحاب؟. ماذا تلاحظ؟.

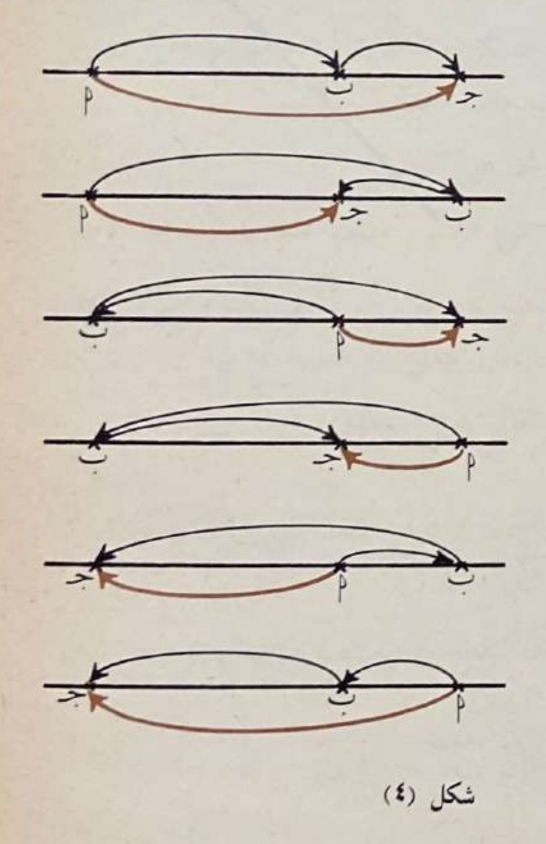
لاحظت في النشاط السابق أن الصورة الناتجة عن د من تتابع الانسحابين المحددين بالمتجهين: $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$، هي نفسها صورة د بالانسحاب المحدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$.

نقول: إن الانسحاب الأخير المحدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ هو **حاصل تركيب** الانسحابين المتتاليين المحدّدين بالمتجهين: $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$، ونكتب:

$$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$$

ونقول: إن المتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ هو **حاصل جمع** المتجهين: $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

ويبيّن لنا الشكل (٤) أن حاصل جمع متجهين: $\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}$، هو المتجه $\overleftarrow{\text{أجـ}}$، أيًّا كان وضع النقاط: أ، ب، جـ على المستقيم.



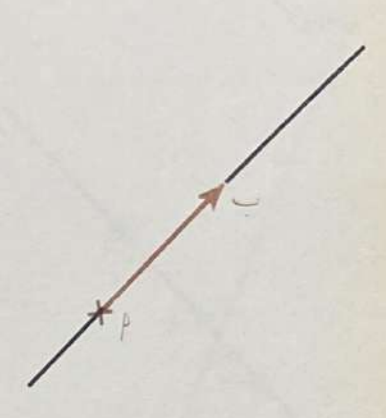
شكل (٤)

٤) المتجّه المعاكس لمتّجه معطى

- أجرينا الانسحاب المحدّد بالمتجّه $\overleftarrow{\text{أب}}$ على الشكل (٥)

ما هي صورة أ في هذا الانسحاب؟

ما هو الانسحاب الذي يعيدنا من ب إلى أ ؟
ما هو المتّجه الذي يحدّد هذا الانسحاب ؟
سمّ هذا المتجه مستعملاً الحرفين : أ وَ ب .

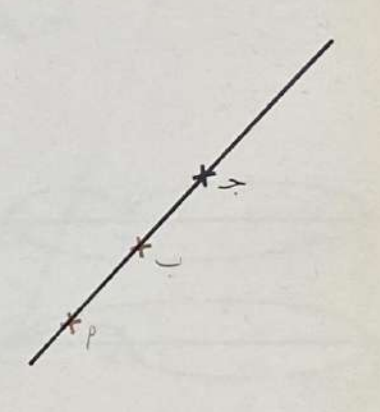


شكل (٥)

إذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ هو المتجه الذي يحدّد انسحابًا معينًا ، فإن الانسحاب المعاكس يحدّده المتجه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، ونسمّيه **المتجه المعاكس** للمتّجه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

٥) المتجه الصفري

■ عيّن على الشكل (٦) صورة جـ بالانسحاب المحدد بالمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، وسمّها جـَ .
عيّن صورة جـَ بالانسحاب المحدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، وسمّها جـً .
قارن جـً وَ جـ . ماذا تلاحظ ؟



شكل (٦)

الانسحاب الحاصل من تركيب الانسحابين المحدّدين بمتجهين متعاكسين هو الانسحاب الذي يحافظ على كل نقطة من المستقيم . المتجه الذي يحدّد هذا الانسحاب يسمى **المتجه الصفري** ، ويرمز له بالرمز : $\overleftarrow{0}$ ، وهو يساوي أيضًا $\overleftarrow{\text{ه ه}}$ ، أيـًا كانت النقطة ه .
بناء على ما سبق نستطيع أن نكتب :

$$\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب أ}} = \overleftarrow{\text{أ أ}} = \overleftarrow{0}$$

نرمز ، بالرمز ($-\overleftarrow{\text{أب}}$) للمتجه $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ونكتب :

$$\overleftarrow{\text{ب أ}} = -\overleftarrow{\text{أب}}$$

تمارين

١) أ، ب، جـ، د وَ هـ خمس نقاط على المستقيم س ص.

ط هي صورة هـ بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{أب}}$.

ي هي صورة ط بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

ك هي صورة ي بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$.

أ - أرسم المستقيم س ص، وعيّن عليه النقاط: أ، ب، جـ، د، هـ، ط، ي، وَك.

ب- ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{أجـ}}$؟

جـ - ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدّد بـ ($\overleftarrow{\text{أب}}+\overleftarrow{\text{ب جـ}}$)؟

د - ما هي صورة هـ بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{أد}}$؟

هـ - أكمل المساواة التالية:

$$(\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + \overleftarrow{\text{جـ د}} = \ldots + \overleftarrow{\text{جـ د}}$$

$$= \ldots\ldots$$

٢) تحقق من أنه أيًّا كان وضع النقاط أ، ب، جـ، د، فإن:

$$(\overleftarrow{\text{أب}} + \overleftarrow{\text{ب جـ}}) + \overleftarrow{\text{جـ د}} = \overleftarrow{\text{أب}} + (\overleftarrow{\text{ب جـ}} + \overleftarrow{\text{جـ د}})$$

$$= \overleftarrow{\text{أد}}$$

٣) النقاط: أ، ب، جـ، د، هـ، ط تتوالى، وبهذا الترتيب على المستقيم س ص، وحيث نعرف أن المسافة بين نقطتين متتاليتين هي ٣ سم.

أ - عيّن صور أ، ب، جـ، د، هـ بالإنسحاب المحدّد بالمتّجه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$.

ب- عيّن صور أ، ب، جـ، د، هـ بالانسحاب المحدّد بالمتجه $\overleftarrow{\text{جـ د}}$.

جـ - سمّ ثلاث متّجهات مساوية لـ $\overleftarrow{\text{جـ د}}$.

د - حدّد متّجهًا مساويًا لـ: $\overleftarrow{\text{أب}}+\overleftarrow{\text{جـ د}}$.

٤) أ، ب، جـ ثلاث نقاط على المستقيم س ص. جَ هي صورة جـ بالانسحاب المحدّد بـ $\overleftarrow{\text{أب}}$.

أ - عيّن جَ على الرسم.

ب- حدّد على الرسم، متجهًا مساويًا للمتجه $\overleftarrow{\text{أب}}$.

جـ - استخدم الحرفين جـ وَ جَ لكتابة متجه يحدّد الانسحاب الذي يجعل أ صورةً لـ ب.

د - ماذا تقول عن المتجهين $\overleftarrow{\text{أب}}$ وَ $\overleftarrow{\text{جـ جَ}}$؟

٥) أ، ب، جـ، د أربع نقاط على المستقيم س ص، بحيث إن: $\overleftarrow{\text{أب}} = \overleftarrow{\text{جـ د}}$.

أ - أثبت أن النقطة م، منتصف [ب جـ]، هي أيضًا منتصف [أد].

ب- أثبت أنّ $\overleftarrow{\text{ب د}} = \overleftarrow{\text{أجـ}}$.

الفصل الحادي عشر :

الأعداد الصحيحة

الدّرس الأول : ماهية الأعداد الصحيحة

الدّرس الثاني : جمع الأعداد الصحيحة وطرحها

الدّرس الثالث : ترتيب الأعداد الصحيحة

الدّرس الرابع : ضرب الأعداد الصحيحة وقسمتها

الدّرس الأول : ماهيّة الأعداد الصحيحة

١) لعبة الأعداد الملونة

■ املأ الفراغات فيما يلي :

ربح ٤ + ربح ٣ = ...

خسارة ٦ + خسارة ٧ = ...

ربح ٧ + خسارة ٣ = ...

خسارة ٨ + ربح ٢ = ...

ربح ٤ + خسارة ٤ = ...

خسارة ٣ + ربح ٣ = ...

نرمز إلى ربح عددٍ ما بالعددِ نفسه ملونًا بالأخضر (مثلاً : ربح ٤ = ٤)، ونرمز إلى خسارة عدد ما بالعدد نفسه ملونًا بالبنّي (مثلاً : خسارة ٤ = ٤). كما نرمز إلى ربح صفر وخسارة صفر بالعدد (٠).

■ املأ الفراغات فيما يلي :

٧ = ربح ٧ ،   ٢١٦ = ... ،   ...... = ربح ٠

١٠ = ... ،   .... = خسارة ٠ ،   ...... = خسارة ص

... = خسارة ٤ ،   س = ... ،   ...... = ربح ع

■ تأكد من صحة الجمل التالية وحوّلها إلى جمل بالأعداد الملونة :

الجمل بالكلمات	الجمل بالاعداد الملونة
ربح ٦ + ربح ٥ = ربح ١١	٦ + ٥ = ١١
خسارة ٧ + خسارة ٩ = خسارة ١٦	.
ربح ٨ + خسارة ١١ = خسارة ٣	.
ربح ١١ + خسارة ٨ = ربح ٣	.
خسارة ٦ + ربح ٦ = خسارة ٠	.
ربح ٨ + خسارة ٨ = ربح ٠	.

■ جد قيمة س كعدد ملون بحيث تكون الجمل التالية صحيحة :

الجمل	قيمة س
س + ٥ = ٠	س = ...
س + ٧ = ٠	س = ...
س + ٨ = ٣	س = ...
س + ٧ = ١٣	س = ...
س + ٤ = ٧	س = ...
س + ١٣ = ٥	س = ...

■ أكمل ما يلي :

٨ + ١٣ = ٨ + ٨ + ٥ = ٥

١٣ + ٨ = ٥ + ... + ٨ = ...

١١٠ + ١١٤ = ...

١٣٥ + ٩٧ = ...

الربح زيادة، والخسارة نقصان. فلو رمزنا إلى العدد الملون ٤ بالرمز (+٤)، وإلى العدد الملون ٣ بالرمز (−٣)، لأصبح لدينا مثلاً:

(+٤) + (−٣) = (+١)

(+) هي إشارة الربح، وَ (−) هي إشارة الخسارة.

■ اجمع الأعداد الملوّنة التالية، ثم استبدل الألوان بالإشارة المناسبة (+ أو −):

الجمل بالاعداد الملونة	الجمل بالاشارات
١٢ + ٧ = ٥	(+ ١٢) + (−٧) = + ٥
٦ + ٨ =	(− ٦) + (− ٨) = − ......
١٩٧٧ + ٢٠٠ =	.
٥٠ + ٧٠ =	.
٢١٦ + ١٨٣ =	.
٤٥ + ٤٥ =	.
٢٠٠ + ٣٠٠ =	.
٧٥ + ٥٠ =	.
٤٠ + ٦٠ =	.
٣٥ + ٣٥ =	.
٧ + ٧ =	.

■ جد قيمة س كعدد مسبوق باشارة بحيث تكون الجمل التالية صحيحة :

الجمل	قيمة س مسبوقة بإشارة
س + (+٥) = ٠	س = ...
س + (−٣) = ٠	س = ...

■ أكمل ما يلي :

(+ ٨) + (−١٥) = (+٨) + (− ٨) + (−٧) = −٧

(−١٣) + (+٦) = (−٧) + ... + (+٦) = ...

(+٧٧) + (−٣٢) = ...

(+٥٥) + (−٩٧) = ...

٢) الحاجة إلى توسيع مجموعة الأعداد الكلية ك

■ جد مجموعة حلّ المعادلة : ٣ س + ٢ = س + ١٠
في مجموعة التعويض ت = {٠، ١، ٢، ٣ }
جد مجموعة حلّ المعادلة نفسها في مجموعة التعويض
تَ = {٠، ١، ٢، ٣، ٤ }

■ حوّل في ك المعادلة ٣ س + ٥ = ٢ س + ١ الى المعادلة المكافئة
س + ٤ = ٠
ما هي مجموعة حلّ هذه المعادلة في ك؟

وَجدتَ في القسم الأول من النشاط السابق أن مجموعة حلّ المعادلة :
٣س + ٢ = س + ١٠ في مجموعة التعويض : {٠، ١، ٢، ٣} هي المجموعة الخالية ϕ. وَ وجدت كذلك أن مجموعة حلّ المعادلة نفسها، إذا وسّعنا مجموعة التعويض لتصبح {٠، ١، ٢، ٣، ٤}، هي {٤}.

وبالتالي، فإن توسيع مجموعة التعويض مكّننا من إيجاد حلّ لمعادلة لم يكن لها حل.

في القسم الثاني من النشاط وجدتَ، باستعمالك خصائص العمليات على الأعداد أن المعادلة ٣س + ٥ = ٢س + ١ تكافئ المعادلة س + ٤ = ٠ ووجدت أن مجموعة حلّ هذه المعادلة في ك هي المجموعة الخالية ϕ.

لذلك سوف نوسّع مجموعة الأعداد الكلية ك، محافظين على خصائص عمليّات الجمع والضرب، بحيث نحصل على مجموعة جديدة من الأعداد، نجد ضمنها حلولاً للمعادلة : س + ٤ = ٠، وكذلك بالنسبة لجميع المعادلات من نوع : س + أ = ٠ (حيث أ ∈ ك).

٣) الأعداد الصحيحة

نرمز بالرمز (−١) للعدد الذي يحقق س+١ = ٠ ونكتب : (−١)+١ = ٠

نرمز بالرمز (−٢) للعدد الذي يحقق س+٢ = ٠ ونكتب : (−٢)+٢ = ٠

نرمز بالرمز (−٣) للعدد الذي يحقق س+٣ = ٠ ونكتب (−٣) + ٣ = ٠

وعلى العموم إذا كان أ ∈ ك، فالرمز (− أ) هو رمز العدد الذي يحقق س+ أ = ٠ وَ نكتب (− أ) + أ = ٠

الأعداد : ٠، −١، −٢، −٣، −٤، .... تسمى **الأعداد الصحيحة السالبة**؛ ونرمز لمجموعة هذه الأعداد بالرمز ص⁻.

الأعداد الكلّية : ٠، ١، ٢، ٣، ٤، .... تسمى بالمقارنة **الأعداد الصحيحة الموجبة**، ويرمز لمجموعتها بالرمز : ص⁺

* ما هو العدد س الذي يحقق س + ٤ = ٠؟
ما هو العدد ص الذي يحقق ١٣٤ + ص = ٠؟

$(-٤) + (+٤) = ٠$

وهذا يذكرني بالخسارة والربح.
العدد الصحيح الموجب يمثل ربحًا.
العدد الصحيح السالب يمثّل خسارة.

أي إن: ص$^{+}$ = ك

وللتأكيد على أن العدد ٣ مثلاً، هو عدد صحيح موجب، نكتبه على الشكل: (+٣)، فيصبح لدينا بالتالي:

$(-٣) + (+٣) = ٠$

المجموعة ص = ص$^{+}$ ∪ ص$^{-}$ تسمى **مجموعة الأعداد الصحيحة** وهي:

ص = {...، +٣، +٢، +١، ٠، −١، −٢، −٣، ...}.

المجموعة ص هي بالطبع مجموعة غير منتهية.

ك ⊂ ص

٤) نظير عدد صحيح

كل عدد صحيح موجب يقابله عدد صحيح سالب، بحيث إن مجموع العددين يساوي صفرًا. مثلاً:

$(+٣) + (-٣) = ٠$

نسمي العدد الصحيح السالب (−٣) **نظير** العدد الصحيح الموجب (+٣)، ونسمي كذلك العدد الصحيح الموجب (+٣) نظير العدد الصحيح السالب (−٣)، وكل من العددين: (+٣) وَ (−٣) يسمّى نظيرَ الآخر.

ونرمز عادة لنظير عدد: س ∈ ص، بالرمز (−س) وهكذا، فإن:

- (+٣) = −٣ لأن: نظير +٣ = −٣
- (−٣) = +٣ لأن: نظير −٣ = +٣

وكذلك:

- (−٢) = +٢ ؛ − (+٤) = −٤
- (+٩) = −٩ ؛ − (−١٠) = + ١٠

* جد نظير كل من الأعداد:
+ ٥، −١٧، ٠، + ↑، − ب.
(↑ ∈ ك وَ ب ∈ ك).

نظير العدد صفر هو العدد صفر ، لأن : ٠ + ٠ = ٠

(+٨) يمثل ربح ٨
(–٨) يمثل خسارة ٨
القيمة المطلقة ٨ تمثل القيمة العددية لهذا الربح ولهذه الخسارة.

٥) القيمة المطلقة لعدد صحيح

العدد الكلي ٨ يسمى **القيمة المطلقة** للعددين الصحيحين : (+٨) وَ (–٨)، ونكتب :

|+٨| = ٨ وَ |–٨| = ٨

الرمز «| |» هو رمز القيمة المطلقة.

وكذلك |+٣| = |–٣| = ٣.

- املأ الفراغات فيما يلي :
  |+٤| = ...، |–٤| = ...
  جد قيم س ∈ ص، إذا كان :
  |س| = ٤ ...
- هل الكتابات التالية صحيحة؟ ولماذا؟
  |+٤| = ٤ ؛ |–٤| = ٤ = – (–٤).
  تحقق بإعطائك قيمًا مختلفة للعدد الصحيح أ من أن :
  |أ| = أ اذا كان أ موجبًا.
  |أ| = – أ إذا كان أ سالبًا.

نستطيع اذن تعريف القيمة المطلقة لعدد صحيح أ كما يلي :

|أ| = أ إذا كان أ موجبًا.
|أ| = – أ إذا كان أ سالبًا.
|أ| = ٠ إذا كان أ = صفرًا.

٦) ملاحظة عامة

في الدرس الثالث من الفصل التاسع (مسائل حسابية) لم نجد في مجموعة الأعداد الكلية حلاً للمسألة :

« أب عمره ٣٨ سنة ، وعمر ابنه ١٤ سنة . بعد كم سنة يصبح عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن ؟ » .

رمزنا في هذه المسألة بالحرف س لعدد السنوات المطلوبة ، فحصلنا على المعادلة : ٣ (س + ١٤) = س + ٣٨ .

وكذلك حصلنا على المعادلة المكافئة : س + ٢ = ٠

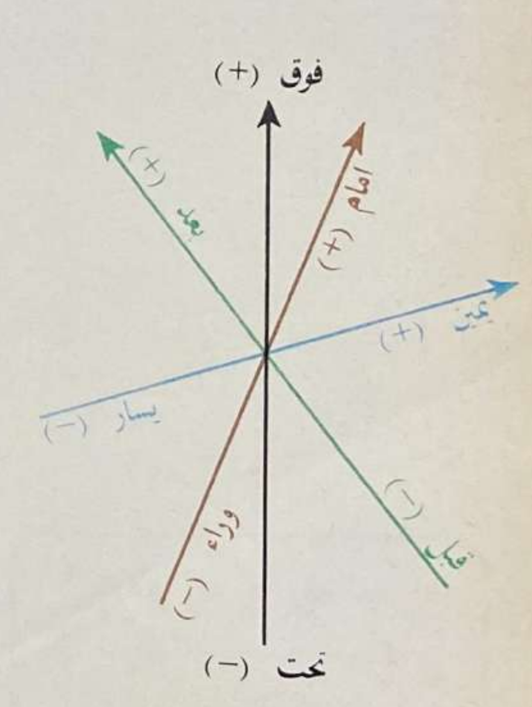
واستنتجنا عدم وجود حلول للمسألة في ك.

ولو افترضنا أن العمليات التي قمنا بها صحيحة في مجموعة الأعداد الصحيحة ، لحصلنا على حل للمعادلة في صں، وهو :

س = نظير العدد ٢ = − ٢ .

وهذا معناه أنه « قبل » سنتين كان عمر الأب ثلاثة أضعاف عمر الابن .

وهكذا نرى أننا تمكنّا من حل المسألة في مجموعة الأعداد الصحيحة بينما كنا قد عجزنا عن حلّها في مجموعة الأعداد الكلية .



لاحظنا حتى الآن دور الأعداد الصحيحة في التعبير عن أمور حياتية متعاكسة ، والأمثلة على ذلك كثيرة ، منها :

الأعداد الموجبة تمثل ربحًا ، والأعداد السالبة تمثل خسارة ،

الأعداد الموجبة تمثل تقدمًا نحو الأمام ، والأعداد السالبة تراجعًا نحو الوراء ،

الأعداد الموجبة تمثل فترة من الزمن اللاحق ، والأعداد السالبة فترة من الزمن السابق .

تمارين

١) ميّز بين الصحيح والخطأ فيما يلي :

- $-٥ \in ص^{-}$ ؛ $٠ \in ص^{-}$
- $-٥ \in ص$ ؛ $٠ = ص^{+} \cap ص^{-}$
- $-٥ \in ص^{+}$ ؛ $\{٠\} = ص^{+} \cap ص^{-}$
- $٠ \in ك$ ؛ $ص^{-} \subset ص^{+}$
- $ص^{+} = ك$ ؛ $ص^{-} \subset ص$
- $ص \subset ك$ ؛ $ص^{+} \subset ص$
- $ك \subset ص$ ؛ $+٤ \in ص^{+}$
- $ك = ص$ ؛ $-(-٤) \in ص^{+}$

٢) احسب القيمة المطلقة لكل من الأعداد الصحيحة التالية :

$|-٤|$ = ... ؛ $|-٥|$ = ...

$|+٣|$ = ... ؛ $|+١٢٤|$ = ...

$|٠|$ = ... ؛ $|-٣١٧|$ = ...

٣) حدّد نظير كل من الأعداد الصحيحة التالية :

نظير (−٥) = ... ؛ نظير (٠) = ...

نظير (+٦) = ... ؛ نظير (+١٠٠) = ...

٤) حدّد قيم العدد الصحيح س في كلٍ من الحالات التالية :

$|س| = ٧$

$|س| = ٠$

$|س| = ٢٤$

٥) احسب ما يلي :

- $-(-٤)$ = ...
- $-(+٦)$ = ...
- $-(٠)$ = ...

٦) احسب ما يلي :

$|-٤| + |+٦|$ = ...

$|-٤| + |+٤|$ = ...

$(-٤) + (+٤)$ = ...

$|١٥| + |-٧| + |-٨|$ = ...

$|-٣| + (-٣)$ = ...

الدرس الثاني : جمع الأعداد الصحيحة وطرحها

١) الجمع

انطلقنا في الدرس السابق، لتعريف مجموعة الأعداد الصحيحة ص ، مما يلي :

أ- توسيع مجموعة الأعداد الكليّة ك، بحيث إن كل عدد ينتمي الى ك يقابله نظير، وهو عدد ينتمي إلى ص.

ب- أن العمليات في ك تقابلها عمليات في ص لها الخصائص نفسها، وتتوافق معها بالنسبة للأعداد الموجبة.

وسنعتمد على ذلك للتعرف على حاصل جمع عددين صحيحين، عارضين على هامش الصفحة العمليات نفسها التي أجريناها على الأعداد الملوّنة المعبّرة عن الربح والخسارة.

▪ تابع إذن العمليات على الأعداد في العمود الأول، وقارنها بالعمليات. على الأعداد الملوّنة على الهامش، والتي تعبر عن ربح وخسارة، ومن ثم تابع العمليات على القيم المطلقة في العمود الثاني.

برّر في كل مرة الخطوات، واعد الكرة مختارًا أعدادًا أخرى.

خصائص الجمع في ص هي :

١) خاصية الابدال :

أ + ب = ب + أ

٢) خاصية التجميع :

(أ+ب) + جـ = أ + (ب+جـ)

٣) خاصية الصفر كعنصر محايد :

٠ + أ = أ + ٠ = أ

٤) خاصية النظير :

أ + (-أ) = (-أ) + أ = ٠

٥) جمع عددين موجبين في ص يتوافق مع جمعهما كعددين كليين.

جمع عددين موجبين :

(+٥) + (+٣) =
٥ + ٣ =
٨ =
+٨

| +٥ | + | +٣ | =
٥ + ٣ =
٨ =
| +٨ |

٥ + ٣ = ٨

> مجموع عددين صحيحين موجبين هو عدد صحيح موجب قيمته المطلقة تساوي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

جمع عددين يختلفان بالإشارة :

الحالة الأولى : القيمة المطلقة للعدد الموجب أكبر من القيمة المطلقة للعدد السالب :

٢ = ٦ + ٨

= (٦-) + (٨+)
= (٦-) + [(٦+) + (٢+)]
= [(٦-) + (٦+)] + (٢+)
= ٠ + (٢+)
٢+

= |٦ - | - |٨+ |
= ٦ - ٨
= ٢
|٢+ |

الحالة الثانية : القيمة المطلقة للعدد السالب أكبر من القيمة المطلقة للعدد الموجب :

٥ = ٧ + ١٢

= (٧+) + (١٢-)
= [(٥-) + (٥+)] + (٧+) + (١٢-)
= (٥-) + [(٥+) + (٧+)] + (١٢-)
= (٥-) + (١٢+) + (١٢-)
= (٥-) + ٠
٥-

= |٧+ | - |١٢- |
= ٧ - ١٢
= ٥
|٥ - |

مجموع عددين صحيحين يختلفان بالإشارة هو عدد صحيح إشارته هي إشارة أكبرهما بالقيمة المطلقة ، وقيمته المطلقة هي حاصل طرح قيمتيهما المطلقتين.

جمع عدد سالبين :

(−٨) + (−٧) =

(−٨) + (−٧) + [(+١٥) + (−١٥)] =

(−٨) + (−٧) + (+١٥) + (−١٥) =

(−٨) + (−٧) + [(+٨) + (+٧)] + (−١٥) =

[(−٨) + (+٨)] + [(−٧) + (+٧)] + (−١٥) =

٠ + ٠ + (−١٥) =

− ١٥

|−٨| + |−٧| =

٨ + ٧ =

١٥ =

|−١٥| =

٨ + ٧ = ١٥

مجموع عددين صحيحين سالبين هو عدد صحيح سالب قيمته المطلقة تساوي مجموع قيمتيهما المطلقتين.

(+ ١٣) + (+٢٥) = + ٣٨

(−١٧) + (− ٩) = − ٢٦

عددان صحيحان لهما الاشارة نفسها يتآلفان بالجمع .

(+ ١٤) + (−٨) = +٦

(− ٢١) + (+٧) = − ١٤

عددان صحيحان يختلفان بالاشارة يتصارعان بالجمع والغلبة لصاحب القيمة المطلقة الأكبر.

٢) الطرح

تعرفنا على عملية الطرح في **ك** كعملية عكسية للجمع ؛ فالجمل التالية مثلاً ، هي جمل متكافئة :

٧ + ٥ = ١٢ ؛ ١٢ − ٧ = ٥ ؛ ١٢ − ٥ = ٧

وبالطريقة ذاتها نعرّف عملية الطرح في مجموعة الأعداد الصحيحة كعملية عكسية للجمع.

مثلاً :

(+٨) + (+٧) = +١٥

نسمي العدد (+٨) **الفرق** بين العددين : (+١٥) **وَ** (+٧) ، ونكتب :

(٧+) − (١٥+) = ٨+

نسمي هذه العملية **طرحًا** ، والإشارة (−) هي إشارة الطرح ، وتُقرأ : « **ناقص** »

أما العدد (+٧) ، فهو الفرق بين العددين : (+١٥) **وَ** (+٨)، ونكتب :

(٨+) − (١٥+) = ٧+

٣) الطرح وجمع النظير

■ لاحظ العمليات التالية، وأكملها، وقارن بين عمليتي الطرح وجمع النظير :

عملية الطرح	عملية جمع النظير
(٦+) − (٥+) = ١− لأن : (١−) + (٦+) = ٥+	(٦−) + (٥+) = ١−
(٨−) − (٧−) = ١+ لأن : (١+) + (٨−) = ٧−	(٨+) + (٧−) = ١+
(٢+) − (١−) = ٣− لأن :	....
(٣−) − (١+) = ٤+ لأن :	....

*** أحسب ما يلي :**

(٣+) − (٧ +)=......

(٣−) − (٧+) = ...

(٣+) − (٧−) = ...

(٣−) − (٧−) = ...

لاحظت في النشاط السابق أنك تستطيع إبدال عملية طرح عدد من عدد آخر بعملية جمع نظيره إلى هذا العدد الآخر.

حاصل طرح عدد من عدد آخر هو حاصل جمع نظير هذا العدد إلى العدد الآخر.

أ − ب = أ + (− ب)

تمارين

١) إجمع الأعداد الصحيحة التالية :

(+٥) + (−٣) = ... ؛ ٠ + (+٤) = ...

(−٧) + (−٩) = ... ؛ (−٥) + ٠ = ...

(−٤) + (+٥) = ... ؛ (+٢١٦) + (−١٠٠) =

(+١٩) + (−٢٩) = ... ؛ (+٢١٦) + (−١٠٠٠) =

(+٢٨) + (−٥٨) = ... ؛ (+٢١٣) + (−٢١٣) =

(+١٣٧) + (+١٣) = ... ؛ (− أ) + (+ أ) =

٢) أجر العمليات التالية ذهنيًا :

(−٧) + (+٨) + (−١) = ...

(+١٢٣) + (−١٩) + (−١٢٣) = ...

(−٢٤) + (+٤) + (−١٤) = ...

(+١٠) + (−٢٠) + (−٣٠) = ...

٣) ازداد ما يملكه محمود ٢٥ ريالاً ، ثم نقص ٤٧ ريالاً ، ثم نقص ٣٦ ريالاً ، ثم ازداد ٧٥ ريالاً .

عبّر بالأعداد الصحيحة عما حصل لنقود محمود ، ثم مثّل ما سبق بعملية جمع على الأعداد الصحيحة ، وحدّد النتيجة .

٤) صعد كمال ٦ درجات على سلّم المبنى ، ثم صعد ٣ درجات ، ثم نزل ١٦ درجة ، ثم نزل ٣ درجات ، ثم صعد ١٠ درجات .

عبّر بالأعداد الصحيحة عمّا فعل كمال ، واحسب النتيجة .

٥) تقدمت إلى الأمام ١٣٣ خطوة ثم تراجعت إلى الوراء ٨٠ خطوة ، ثم تقدمت ١٧ خطوة ، ثم تراجعت ٧٧ خطوة .
عبّر عن ذلك بالأعداد الصحيحة واحسب نتيجة ما قمت به .

٦) اطرح الأعداد الصحيحة التالية :

(+١٤) − (−٧) =

(−٦) − (−٨) =

(−٤) − (+٩) =

(+٥) − (+١١) =

(−٧) − (+٧) =

(−٩) − (−٦) =

(−٢٢) − (+١١) =

(−١١) − (+٢٢) =

(+١٥) − (+٥) =

(+٨) − (+٨) =

(+٨) − (−٨) =

٧) جد قيمة المجهول (س ∈ صـ) في كلٍ مما يلي :

س − (+٦) = −٩

س − (−١٤) = +٨

س − أ = − أ

س + (−٩) = − ١٧

س + (+١٧) = + ١٧

س + أ = أ

الدّرس الثالث : ترتيبُ الأعداد الصحيحَة

١) مبدأ مقارنة الأعداد الصحيحة

في مجموعة الأعداد الكليّة ، (٩ > ٧) تعني أن عملية الطرح (٩ – ٧) ممكنة، وأن (٩ – ٧ > ٠).

وعلى العموم نقول :

إن العدد الصحيح أ هو أكبر من العدد الصحيح ب ، ونكتب : أ > ب ، إذا كان (أ–ب) عددًا صحيحًا موجبًا أكبر من الصفر. ونقول أيضًا : إن ب هو أصغر من أ .

أ > ب
تكافئ
أ – ب > ٠

٢) ترتيب الأعداد الصحيحة الموجوبة

الأعداد الصحيحة الموجبة هي الأعداد الكلية ، وقد رتبت على الشكل :

٠ < +١ < +٢ < +٣ < +٤ < ....

نلاحظ إذن :

كل عدد صحيح موجب هو أكبر من الصفر. تكبر الأعداد الصحيحة الموجبة كلما كبرت قيمتها المطلقة.

٣) ترتيب الأعداد الصحيحة السالبة

■ احسب :

• ٠ − (−٨) = ...

قارن العددين : (٠) وَ (−٨)، واملأ الفراغ فيما يلي :

• ٠ .... −٨

أعد العملية محافظًا على الصفر ، ومستبدلاً (−٨) بأي عدد صحيح سالب . ماذا تستنتج ؟

أعد العملية مستبدلاً العدد صفر بأي عدد صحيح موجب. ماذا تستنتج ؟

■ احسب :

(−٨) − (−٩) = ...

قارن العددين : (−٨) وَ (−٩)، واملأ الفراغ فيما يلي :

(−٨) ...... (−٩)

أعد العملية مستبدلاً (−٨) بالعدد (−١٩) ، وَ (−٩) بالعدد (−١٠٩)، واملأ الفراغ فيما يلي :

(−٩) ...... (−١٠٩)

أعد العملية من جديد مختارًا أي عـددين صحيحين سالبين، شرط أن تكون القيمة المطلقة للعدد المطروح أكبر من القيمة المطلقة للعدد المطروح منه .

ماذا تستنتج ؟

لاحظت في النشاط الأول أن أي عدد صحيح سالب هو أصغر من الصفر ، وهو أيضًا أصغر من أي عدد صحيح موجب .

ولاحظت في النشاط الثاني أنه بالنسبة لعددين صحيحين سالبين، العدد الأكبر هو صاحب القيمة المطلقة الصغرى.

نستنتج إذن:

> كل عدد صحيح سالب هو أصغر من الصفر، وأصغر من أي عدد صحيح موجب. وتصغر الأعداد الصحيحة السالبة كلما كبرت قيمتها المطلقة.

وَ نرتّب الأعداد الصحيحة السالبة على الشكل التالي:

٠ < ١ − < ٢ − < ٣ − < ٤ − < ....

٤) ترتيب الأعداد الصحيحة وتمثيلها على خط الأعداد

من الفقرتين السابقتين نستنتج أن الأعداد الصحيحة مرتّبة ترتيبًا كليًا على الشكل التالي:

... ٤+ < ٣+ < ٢+ < ٠ < ١ − < ٢ − < ٣ − < ٤ − < ...

وكما مثلنا الأعداد الكليّة على نصف مستقيم، نمثل الأعداد الصحيحة على مستقيم، آخذين بعين الاعتبار الترتيب السابق:



أيّ عدد على يمين عدد اخر هو أكبر منه.

تمارين

١) قارن العددين التاليين في كلٍ ممّا يلي :

أ) + ٧ وَ + ١٥

ب) - ١٣٧٥ وَ - ١٠٣٧٥

جـ) + ٢١٥١٣ وَ - ١٠٠٠٠

د) صفر وَ - ٣١٧

هـ) صفر وَ ١١٥

٢) رتّب الأعداد في كلٍ ممّا يلي :

أ) +٧، -٥، +٣، -٢، ٠، +٩، -١، -٧.

ب) -٦، +٢٠، -١٥، -١، ٠، +٨، +٣٠.

جـ) +٧، -٩، -٦، ٠، +٣، +٤، -٣، -١.

٣) الأعداد في كل مما يلي تتزايد بوتيرة واحدة. جد مقدار التزايد، وأكمل بأربعة أعداد تليها :

أ) -٩، -٥، -١، ......

ب) +٧، +١٠، +١٣ ......

جـ) -٢٠، -١٥، -١٠، ......

٤) في كلٍ مما يلي تتناقص الأعداد التالية بوتيرة واحدة. جد مقدار التناقص، وأكمل بستة أعداد تليها :

أ) - ١٠، -١٥، -٢٠، ......

ب) +٨، +٥، +٢، ......

جـ) +٧، +٣، -١، ......

الدّرس الرابع : ضربُ الأعداد الصحيحة وقِسمتها

١) الضرب

كما فعلنا بالنسبة لعملية الجمع في مجموعة الأعداد الصحيحة، سنعتبر أن عملية الضرب في ك ، يقابلها عملية ضرب في ص، لها الخصائص نفسها، وتتوافق معها بالنسبة للأعداد الموجبة.

وسنعتمد على ذلك للتعرف على حاصل ضرب عددين صحيحين.

■ لاحظ العمليات على الأعداد في العمود الأول، ثم تابع العمليات على القيم المطلقة في العمود الثاني.

برّر في كل مرة الخطوات، وأعد الكرة مختارًا أعدادًا أخرى.

ضرب عددين موجبين :

(+٤) × (+٦) =	|+٤| × |+٦| =
٤ × ٦ =	٤ × ٦ =
٢٤ =	٢٤ =
+ ٢٤	|+ ٢٤|

حاصل ضرب عددين موجبين هو عدد موجب، قيمته المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين.

خصائص الضرب في ص هي :

١) **خاصية الإبدال :**

أ × ب = ب × أ

٢) **خاصية التجميع**

أ × (ب × جـ)

= (أ × ب) × جـ

٣) **خاصية الواحد كعنصر محايد :**

١ × أ = أ × ١ = أ

٤) **خاصية توزيع الضرب بالنسبة للجمع :**

أ × (ب + جـ)

= أ×ب + أ× ب

(أ+ب)×جـ = أ×جـ + ب×جـ

٥) **ضرب عددين موجبين في ص يتوافق مع ضربهما كعددين كليين.**

أ > ٠ ، ب > ٠

أ × ب = + (|أ| × |ب|)

ضرب عدد موجب بعدد سالب :

(+٦) × (−٥) =
(+٦) × (−٥) + (+٦) × (+٥) + (−٣٠) =
(+٦) × [(−٥) + (+٥)] + (−٣٠) =
(+٦) × ٠ + (−٣٠) =
٠ + (−٣٠) =
− ٣٠

|+٦| × |−٥| =
٦ × ٥ =
٣٠ =
|−٣٠|

حاصل ضرب عدد موجب بعدد سالب هو عدد سالب، قيمته المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين.

أ > ٠ ، ب < ٠
أ × ب = − (|أ| × |ب|)

ضرب عددين سالبين :

(−٤) × (−٧) =
(−٤) × (−٧) + (−٢٨) + (+٢٨) =
(−٤) × (−٧) + [(−٤) × (+٧)] + (+٢٨) =
(−٤) × [(−٧) + (+٧)] + (+٢٨) =
(−٤) × ٠ + (+٢٨) =
٠ + (+٢٨) =
+ ٢٨

|−٤| × |−٧| =
٤ × ٧ =
٢٨ =
|+٢٨|

حاصل ضرب عددين سالبين هو عدد موجب، قيمته المطلقة تساوي حاصل ضرب قيمتيهما المطلقتين.

أ < ٠ ، ب < ٠
أ × ب = + (|أ| × |ب|)

مما سبق نستنتج قاعدتي الضرب الأساسيتين :

حاصل ضرب عددين صحيحين، لهما الإشارة نفسها ، هو عدد موجب .
حاصل ضرب عددين صحيحين، اشارتاهما مختلفتان ، هو عدد سالب .
وفي كلتا الحالتين، القيمة المطلقة لحاصل الضرب هي حاصل ضرب القيمتين المطلقتين للعددين .

٢) حاصل ضرب عدة أعداد صحيحة

■ لاحظ ما يلي :

(+٧) × (+٥) = + ٣٥

(−٧) × (+٥) = − ٣٥

ما هي العلاقة بين إشارة حاصل الضرب ، وإشارة العدد الذي ضربناه بـ (+٥)؟

■ لاحظ ما يلي :

(+٧) × (−٥) = − ٣٥

(−٧) × (−٥) = + ٣٥

ما هي العلاقة بين إشارة حاصل الضرب، وإشارة العدد الذي ضربناه بـ (−٥)؟

* **تحقق على امثلة من أن**
− أ = (−١) × أ

لاحظت في النشاط السابق أن الضرب بعدد موجب يحافظ على إشارة العدد المضروب فيه.

كما لاحظت أن الضرب بعدد سالب يغيّر إشارة العدد المضروب فيه.

ولو ضربنا عدة أعداد لكانت إشارة الحاصل (+) إذا كان عدد العوامل السالبة زوجيًا، وَ (−) اذا كان عدد العوامل السالبة فرديًا.

■ تأكد مما سبق، بعد قيامك بالعمليات التالية:

أ) (+٥) × (+٦) ×(+٢) = ...

ب) (−٤) × (+٣) × (+٥) = ...

جـ) (−٣) × (−٦) × (+٢) = ...

د) (−٤) × (−٣) × (−٢) = ...

حاصل ضرب عدة أعداد صحيحة هو عدد سالب إذا كان عدد العوامل السالبة فرديًا، وهو عدد موجب إذا كان عدد العوامل السالبة زوجيًا.

٣) القسمة

تعرفنا على عملية القسمة في ك كعملية عكسية للضرب؛ فالجمل التالية، مثلاً، هي جمل متكافئة:

٤×٣ = ١٢؛ ١٢ ÷ ٣ = ٤؛ ١٢ ÷ ٤ = ٣.

كذلك نعرّف عملية القسمة في صـ كعملية عكسية لعملية الضرب، مثلاً:

$$(-6) \times (+5) = -30$$

نسمي العدد (−٦) **حاصل قسمة** (−٣٠) على (+٥) ونكتب :

$$-6 = (-30) \div (+5)$$

نسمي هذه العملية **قسمة**، والإشارة (÷) هي إشارة القسمة وتقرأ : «**مقسوم على**».

كذلك العدد (+٥)، هو حاصل قسمة (−٣٠) على (−٦)، ونكتب :

$$+5 = (-30) \div (-6)$$

* **احسب ما يلي :**

(+ ١٤) ÷ (+ ٧) = ...

(+ ١٢) ÷ (− ٢) = ...

(− ٢٤) ÷ (+ ٨) = ...

(− ٣٦) ÷ (− ٩) = ...

من قاعدتي ضرب عددين صحيحين، نستنتج قاعدتي قسمة عددين صحيحين كما يلي :

حاصل قسمة عددين صحيحين، لهما الإشارة نفسها، هو عدد موجب.
حاصل قسمة عددين صحيحين، اشارتاهما مختلفتان، هو عدد سالب.
وفي كلتا الحالتين، القيمة المطلقة لحاصل القسمة هي حاصل قسمة القيمتين المطلقتين للعددين.

تماريـن :

١) أجر العمليات التالية :

(−٧) × (+٨) = ... ؛ (+٢٠) × (+٣٠) = ...

(−٩) × (−٢٢) = ... ؛ (−١٤) × (+١) = ...

(+٣١٧) × (−١٠٠) = ... ؛ (−١٥) × (−١) = ...

٢) احسب ما يلي بطريقتين، وَ قارن الأجوبة :

(−٥) × [(+٦) + (−٣)] ؛ (−١٢) × [(−٣) + (−٢)]

(+٦) × [(−٢) + ٠] ؛ ٠ [(−٥) + (+٦)]

(+٧) × [(−٨) + (−٤)] ؛ (−١) × [(+١٠) + (−٢٠)]

٣) حول عملية الطرح إلى عملية جمع، ثم وزّع الضرب بالنسبة للجمع، واحسب النتيجة :

(−٢) × [(+٣) − (−٥)] ؛ (−٥) × [(−٦) − (−٧)]

(+٣) × [(+٣) + (−٤)] ؛ (−٤) × [(+٦) − (+٧)]

٤) أثبت أن عملية الضرب تتوزّع بالنسبة للطرح، أي أن :
أ × (ب − جـ) = أ × ب − أ × جـ مستعيناً بتحويل الطرح إلى جمع .

٥) اختصر الجمل التالية :

٨س − ٩س + ٤س − ٥س = ...

٣ (س−ص) −٥ س + ٦ص = ...

٢ أ + ٣ب − ٦ أ + ٥ب − أ = ...

٦) إذا كان س = −٢، ص = +٣، ع = −١٠
احسب كلاً مما يلي :

٢س − ص + ٣ ع = ...

٢س ص − ٣ ص ع + س ع . = ...

٧) أحسب ما يلي :

(−٤) × (+٢٥) × (−١٠) = ...

(+٦) × (−٥) × (+٤) = ...

(−٢) × (−٣) × (−٤) = ...

٨) أجر العمليات التالية :

(−٤٢) ÷ (+٣) = ...

(+٩٢٨) ÷ (−٣٢) = ...

(−٩٢٨) ÷ (−٢٩) = ...

(−٧٤٨٨) ÷ (+٣١٢) = ...

(أ − ٤) ÷ (٤ − أ) = ...

٩) من المساواة : (+٢٤) × (+١٩) = +٤٥٦
احسب مباشرة :

(+٤٥٦) ÷ (−٢٤) = ...

(−٤٥٦) ÷ (−١٩) = ...

(−٤٥٦) ÷ (+٢٤) = ...

(+٤٥٦) ÷ (+١٩) = ...

الدّرس الخامس : تبسيط التراكيب العدديّة

١) نظير حاصل جمع أعداد صحيحة

■ قارن العمليتين التاليتين :

أ - نظير حاصل جمع الأعداد (+٥)، (−٣)، (+٦)

هو : − ((+٥) + (−٣) + (+٦)) = − ((+٨)) = − ٨.

ب- حاصل جمع نظائر الأعداد : (+٥)، (−٣)، (+٦)

هو: (−٥) + (+٣) +(−٦) = −٨

■ لقد لاحظت في الدرس السابق أن :

− أ = (−١) × أ

اتّبع الخطوات التالية ، وأعطِ المبرّرات :

− (س + ص + ع) = (−١) × (س + ص + ع)

= (−١) × س + (−١) × ص + (−١) × ع

= (−س) + (− ص) + (−ع)

من النشاط السابق نستنتج :

نظير حاصل جمع عدة أعداد صحيحة يساوي حاصل جمع نظائر هذه الأعداد الصحيحة.

− (س + ص + ع)
= (− س) + (− ص)+(−ع)

■ عملية الطرح تتحوّل إلى عملية جمع (جمع نظير المطروح).
لحساب نظير حاصل طرح عددين ، حوّل عملية الطرح الى عملية جمع ،
واحسب نظير حاصل الجمع فيما يلي :

− ((+٧) − (+٩)) = − ((+٧) + (−٩)) = (−٧) + (+٩)
= (+٢)

− ((−٨) − (+٦)) = ... = ... = ...

− ((−٥) − (−٦)) = ... = ... = ...

− ((+٨) − (−١٢)) = ... = ... = ...

− (س − ص) = − س + ص

٢) فكّ الأقواس

للقيام بعمليتين متتابعتين نستخدم الأقواس.

■ استخدم الأقواس لتعبّر عن العمليتين المتتابعتين التاليتين :
أ − اجمع العددين (+٧) وَ (−٥)
ب− اطرح النتيجة من (+٣)

في النشاط السابق كتبت :
(+٣) − ((+٧) + (−٥))
لتعبّر عن أنك طرحت من (+٣) حاصل جمع العددين : (+٧) وَ (−٥).
ولحساب نتيجة ذلك نتّبع إحدى الطريقتين التاليتين :
الطريقة الأولى : نحسب أولاً نتيجة العملية الأولى :
(+٧) + (−٥) = +٢
ثم نحسب نتيجة العملية التالية :
(+٣) − (+٢) = (+٣) + (−٢) = +١

الطريقة الثانية : نحوّل عملية الطرح إلى عملية جمع النظير، ونطبّق القاعدة التي تقول : «إن نظير حاصل جمع عددين، هو حاصل جمع نظيري العددين»، فنحصل على :

(+٣) − ((+٧) + (−٥)) =
(+٣) + ((−٧) + (+٥)) =
(+٣) + (−٧) + (+٥) = +١

نستنتج من الطريقة الثانية ما يلي :

> عند فكّ قوسين مسبوقين بإشارة الطرح (—) نغيّر إشارات الأعداد الموجودة داخلها، وإذا كانا مسبوقين باشارة (+) نبقي على اشارات الأعداد الموجودة داخلها.

> *** احسب** :
> **أ** - (+٦) − [(−٥) + (+٩)]
> **ب**- (−٥) − [(−٣) − (−٧)]

٣) أنواع الأقواس

للقيام بعدة عمليات متتابعة نستخدم الأقواس، وهي على ثلاثة أنواع :

١) القوسان ( )، وتستعمل عند القيام بعمليتين متتابعتين.
٢) المعقفان [ ] وتستعمل عند القيام بثلاث عمليات متتابعة.
٣) الحاصرتان { } وتستعمل عند القيام بأربع عمليات متتابعة.

▲ **مثال ١ :**

١) نطرح (−٥) من +٣ : (+٣) − (−٥)

٢) نضيف +٧ إلى النتيجة : (+٧) + ((+٣) − (−٥))

٣) نطرح النتيجة من (+٦) :

(+٦) − [(+٧) + ((+٣) − (−٥))]

٤) نضيف (+٨) إلى النتيجة :

+٨ + {(+٦) − [(+٧) + ((+٣) (−٥))] }

■ احسب النتيجة العددية لكل عملية من العمليات السابقة، وعلى التوالي، وأعط الجواب .

■ احسب النتيجة بفكّ الأقواس على التوالي : الأقواس ، العواقف ، الحواصر . ثم قارن النتيجتين .

▲ **مثال ٢ :**

(+٧) − {(−٥) + [(−٣) − ((−٧) − (+١٣))] } =

(+٧) − {(−٥) + [(−٣) + (+٧) + (+١٣)] } =

(+٧) − {(−٥) + (−٣) + (+٧) + (+١٣)} =

(+٧) + (+٥) + (+٣) + (−٧) + (−١٣) =

(−٥) .

▲ **مثال ٣ :**

٤ س − [٢ س − (٥ س − ٣ ص) − ٣ ص] =

٤ س − [٢ س − ٥ س + ٣ ص − ٣ ص] =

٤ س − [−٣ س] =

٤ س + ٣ س =

٧ س .

تمارين

١) جد نظير كل من العبارات التالية :

((+٩) + (−٨))

((−٥) + (−٧))

((+٣) + (−٦) + (+٦))

(س + ص − ع)

(س − ص − ع)

(−س − ص + ع)

٢) احسب بفك الأقواس كلاً مما يلي :

((−٢) + (+٣)) + ((+٥) − (−٢)) − ((−٤) + (−٦)).

(−٤) − ((−٥) + (+٢)) + ((−٦) − (+٧)).

((+٣) − (−٣) − (+٤)) − (+٦).

−((+٢١) − (+١٩)) + ((−٣٢) + (+٤٥) − (−٤٢)).

٣) احسب بفك الأقواس كلاً مما يلي :

(+١٠) − [(−١٧) − ((+٦) − (−٥) + (+٤)) − (−١)].

(−١٢) − [(+٥) − ((+٤) − (+٨)) − (−٤)] − (+١٤).

−[(+١) + ((+٣) − (+٧))] + ((−٤) + (+٧)).

((+١٤) − (−١٧)) − {(−١) − [(+٢) − ((+٥) − (−٣))]}.

[((+٧) + (−٩)) − (−٨)] − {٠ − [(+١) − ((−٣) − (+٤))]}.

٤) أكمل ما يلي :

(+٤) −س + (−٥) = (+٤) − (... − ...)

= (+٤) − (... + ...)

٥) بسّط العبارات التالية :

٢س + (٣س + ٤ص)

٢س − (٣س − ٤ص).

س − (٢ص + ٣ع) − (س − ٢ص − ٣ع).

٤ أ − [أ − (ب + أ) + ب].

٥ أ − {٢ب + [٤ أ − (ب − ٢ أ)]}

٦)

أ − ما هي الجملة التي إذا طرحنا منها : [٤ أ + (−١)]، نحصل على [٢ أ − (−٦)]؟

ب− ما هي الجملة التي إذا أضفنا اليها ٤ أ + (−١) نحصل على :

[٢ أ − (−٦)]؟

٧) اطرح :

أ) س + (−١) من ٣س − (+٤)

ب) ٤س + ٢ص من ٥س − ٤ص

جـ) س + ٢ص + ٣ع من ع + ٢ص + ٣س.

الفصل الثاني عشر :

الدائرة والدوران

الدّرس الأول : الدّائرة وعناصرها

١) الدائرة

■ عيّن نقطة على دفترك، وسمّها م.

حدّد نقطة أ تبعد ٢ سم عن م.

حدّد نقاطًا أخرى ب ، جـ، د ، ... تبعد كلها ٢ سم عن م.

هل تستطيع متابعة النشاط وتحديد جميع النقاط ، واحدة بعد الأخرى ، والتي تبعد جميعها ٢ سم عن م؟

في نشاطك السابق حدّدت في البداية بعض النقاط التي تبعد ٢ سم عن النقطة م ، وحصلت على رسم كما في الشكل (١) ، ولاحظت أن متابعة النشاط ، وتعيين جميع النقاط التي تبعد ٢ سم عن م ؛ نقطة بعد أخرى، هي عملية غير ممكنة وهذا راجع إلى أن مجموعة النقاط في المستوى التي تبعد ٢ سم عن النقطة م هي مجموعة غير منتهية.

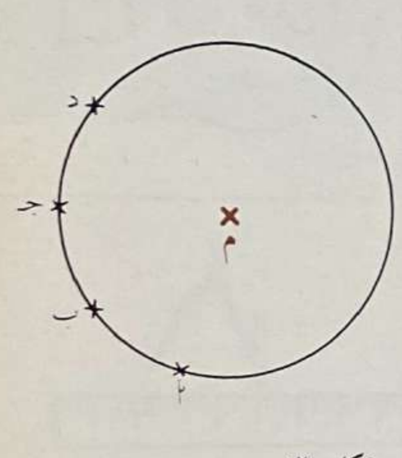
شكل (١)

الشكل (٢) يمثّل جميع النقاط التي تبعد ٢ سم عن النقطة م.

مجموعة النقاط التي تبعد ٢ سم عن م تسمّى **دائرة** والنقطة م هي **مركز الدائرة**.

كل قطعة تصل المركز بنقطة تنتمي إلى الدائرة تسمّى : **نصف قطر الدائرة**، أو **شعاعًا**.

كل قطعة من القطع : [م أ] ، [م ب] ، [م جـ] ، [م د] ؛ على الشكل (٢)، هي نصف قطر.



شكل (٢)

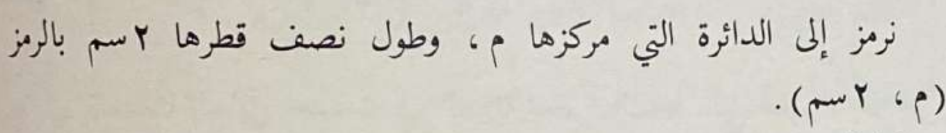
المسافة التي حدّدتْ بُعد نقاط الدائرة عن المركز (٢ سم في النشاط) تسمّى

طول نصف القطر.

نُحدّد الدائرة إذن بمعرفة مركزها، وطول نصف قطرها.

الدائرة هي مجموعة النقاط التي تبعد البعد نفسه عن نقطة معيّنة.
النقطة المعيّنة هي مركز الدائرة، وبعد نقاط الدائرة عن المركز هو طول نصف قطر الدائرة.

م هو مركز الدائرة.
[م أ] هو نصف قطر في الدائرة.
| م أ | هو طول نصف قطر الدائرة.

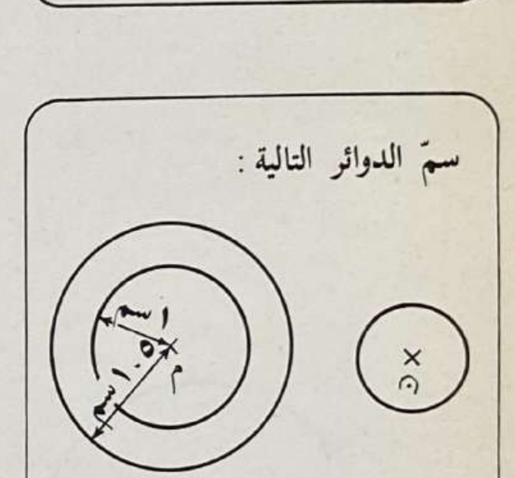


نرمز إلى الدائرة التي مركزها م، وطول نصف قطرها ٢سم بالرمز (م، ٢سم).

كذلك الرمز (ن، ٥, ٣سم)، هو رمز الدائرة التي مركزها ن، وطول نصف قطرها ٥, ٣سم.

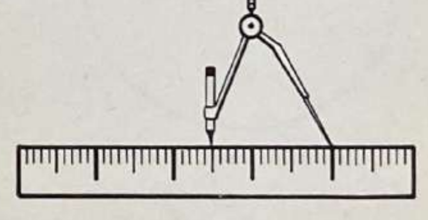
واختصارًا، وإذا لم يكن هنالك التباس، نرمز إلى دائرة برمز مركزها بين قوسين؛ فنكتب (م)؛ أو (ن).

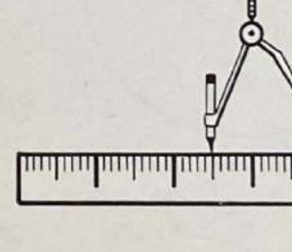
سمّ الدوائر التالية:

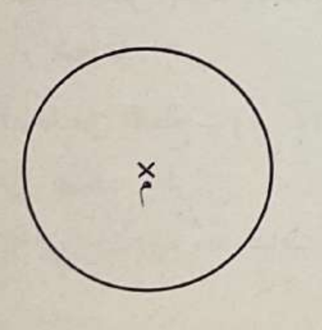


٢) رسم دائرة

■ قم بنشاط مشابه للنشاط التالي لرسم دائرة مركزها م، طول نصف قطرها ٥, ١ سم.







٣) موقع نقطة بالنسبة لدائرة

■ على الشكل المجاور رسمنا الدائرة (م)، وعيّنا بعض النقاط من المستوى.

أ ∈ (م). ما هو طول نصف قطر هذه الدائرة؟

قارن أطوال القطع، واملأ الفراغات فيما يلي بالرمز المناسب:

| م ب | .... | م أ | .... | م جـ |

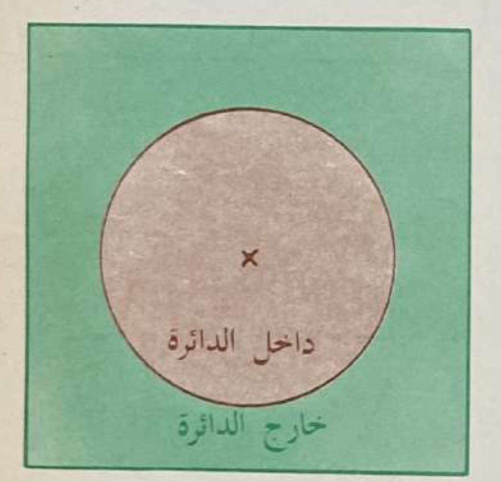
| م د | .... | م أ | ؛ | م جـ | .... | م أ |

| م هـ | .... | م أ | ؛ | م ط | .... | م أ |

شكل (٣)

عيّن نقاطاً من المستوى، بحيث يكون بُعد كلٍ منها عن المركز أصغر من طول نصف القطر.

عيّن نقاطاً من المستوى، بحيث يكون بُعد كلٍ منها عن المركز **أكبر** من طول نصف القطر.



شكل (٤)

لاحظت في النشاط السابق أن الدائرة تجزّئ المستوى إلى ثلاثة أجزاء:

أ – مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة **يساوي** طول نصف القطر ومجموعة هذه النقاط هي الدائرة.

ب – مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة **أصغر** من طول نصف القطر. ومجموعة هذه النقاط هي **داخل الدائرة**.

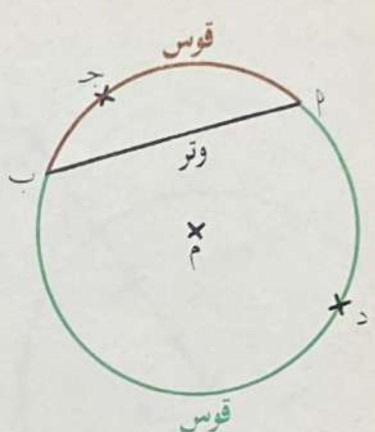
جـ – مجموعة النقاط التي بُعد كل منها عن مركز الدائرة **أكبر** من طول نصف القطر ومجموعة هذه النقاط هي **خارج الدائرة**.

٤) الوتر وَ القوس

■ ارسم دائرة (م) ثمّ عيّن نقطتين: أ وَ ب تنتميان إلى هذه الدائرة.

ارسم القطعة المستقيمة [أ ب]. أين تقع نقاط هذه القطعة بالنسبة إلى الدائرة؟

■ النقطتان : أ وَب تحدّان جزء ين من الدائرة . لوّن أحدهما بالبنّي والاخر بالأخضر .



شكل (٥)

القطعة المستقيمة التي طرفاها نقطتان من دائرة تسمّى **وترًا**.
النقطتان : أ وَب من الدائرة (م)، على الشكل (٥)، تحدّان جزء ين من الدائرة. كل جزء يسمى **قوسًا**. أ وَ ب هما **طرفا** القوس.
لنرمز لقوس طرفاه : أ وَب ؛ نكتب : أجـب⌒ ، واضعين بين الطرفين : أ وَ ب رمز نقطة تنتمي إلى القوس.
نرمز إلى القوس البنّـي على الشكل (٥) بالرمز : أجـب⌒ .
ونرمز إلى القوس الأخضر على الشكل (٥) بالرمز: أدب⌒ .

*** على الشكل (٥)، سمّ كل قوس طرفاه : جـ وَد**

٥) القطر

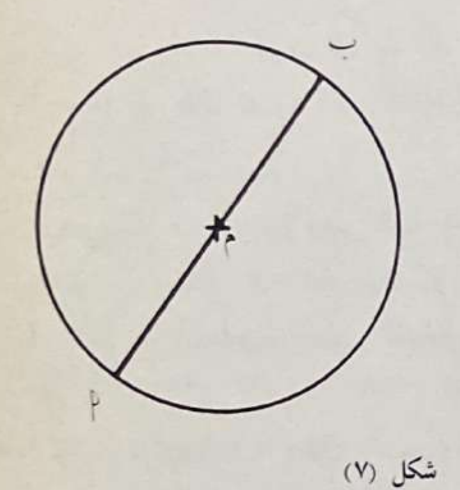
■ ارسم دائرة (م)، وعيّن نقطة أ تنتمي إلى (م). ارسم عدة أوتار لها الطرف المشترك أ.
ارسم الوتر الذي طرفه أ، ويمر في م. سمِّ ب : طرفه الاخر. ما هي م بالنسبة للنقطتين أ وَ ب؟ ما هو طول الوتر [أب]؟

كل وتر يمرّ في المركز يسمى **قطرًا**. وطول القطر هو ضعفا طول نصف القطر.

شكل (٦)

*** ارسم أقطارًا أخرى للدائرة على الشكل (٦)**

٦) مركز تناظر الدائرة

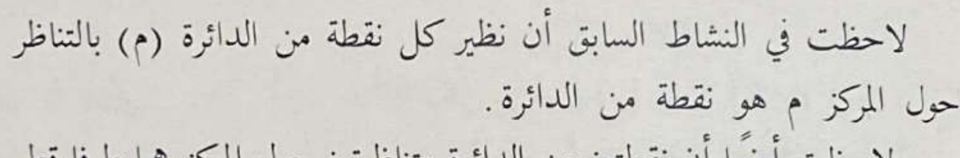


شكل (٧)

على الشكل (٧)، [أب] هو قطر في الدائرة (م).

■ أثبت أن أ وَ ب متناظرتان بالتناظر حول م.

عيّن نقطة جـ على الدائرة. عيّن نظيرها د بالتناظر حول م. أين تقع النقطة د؟ ما هي القطعة [جـ د] بالنسبة للدائرة؟



لاحظت في النشاط السابق أن نظير كل نقطة من الدائرة (م) بالتناظر حول المركز م هو نقطة من الدائرة.

ولاحظت أيضًا أن نقطتين من الدائرة متناظرتين حول المركز هما طرفا قطر في الدائرة.

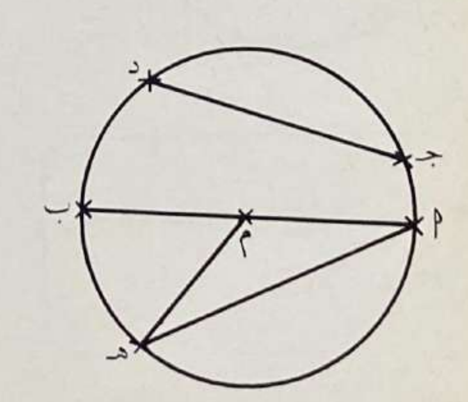
مركز دائرة هو مركز تناظر لها.

تماريــن

١) عيّن نقطتين: ﭐ وَ ب في المستوى.
أ – ما هو طول نصف قطر الدائرة التي مركزها ﭐ، وتمرّ في ب
ب– ارسم هذه الدائرة وعيّن نقطة جـ عليها، ونقطة د داخلها، ونقطة هـ خارجها. قارن | ﭐجـ |، | ﭐد | وَ | ﭐهـ | بطول القطعة [ﭐب].

٢) دائرة مركزها م، وطول نصف قطرها ٣ أمتار. ب، جـ، د ثلاث نقاط من المستوى، بحيث إن:
| م ب | = ٢٩٥سم؛ | م جـ | = ٣١٧سم؛
| م د | = ٣٠٠سم.
أ – أين تقع النقاط: ب، جـ وَ د بالنسبة للدائرة (م)؟
ب– لتكن: بَ، جَـ، دَ نظائر النقاط: ب، جـ، د بالتناظر حول م. أين تقع النقاط بَ، جَـ، دَ بالنسبة للدائرة (م)؟

٣) على الشكل التالي، سمّ الأوتار، والأقطار، وأنصاف الأقطار، وخمسة أقواس.



٤) ارسم الدائرة (م، ٣سم)، وعيّن نقطة ﭐ عليها. ارسم وترًا طوله ٤ سم، وأحد طرفيه ﭐ. كم وترًا تستطيع أن ترسم؟

٥) ﭐ وَ ب نقطتان؛ بحيث إن: | ﭐب | = ٢سم.
أ – ارسم الدائرة (ﭐ، ٣ سم).
ب– ارسم الدائرة (ب، ٣سم).
جـ – ليكن {جـ، د} = (ﭐ) ∩ (ب).
كيف هو المستقيم ﭐب بالنسبة للقطعة [جـ د]؟
كيف هو المستقيم جـ د بالنسبة للقطعة [ﭐب]؟

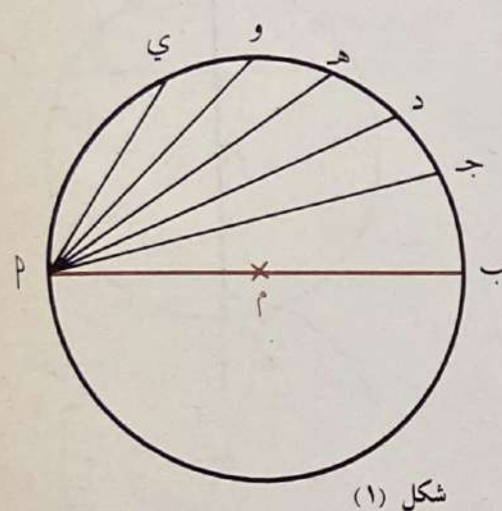
٦) ارسم الدائرة (م، ٥سم)، وارسم فيها الأوتار:
[ﭐب]، [ب جـ]؛ [جـ د]؛ بحيث يكون:
| ﭐب | = | ب جـ | = | جـ د | = ٥سم.
تحقق من أن: م ∈ [ﭐد]. ما هو [ﭐد] بالنسبة للدائرة؟

٧) ﭐ وَ ب نقطتان، بحيث إن: | ﭐب | = ٥سم.
ارسم الدائرتين: (ﭐ، ٢سم) وَ (ب، ٣ سم).
كم نقطة مشتركة للدائرتين؟ وأين تقع؟

٨) [ﭐب] وَ [جـ د] قطران في الدائرة (م).
أثبت أن: | ﭐجـ | = | ب د |.

الدّرس الثاني : خصائص القطر في الدّائرة

١) القطر والأوتار



شكل (١)

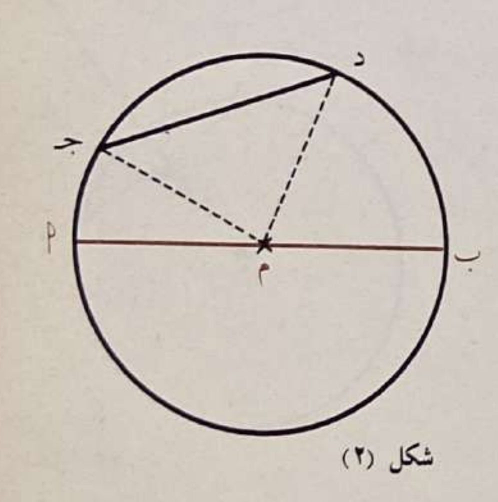
على الشكل (١) رسمنا القطر [أب]، وعدة أوتار في الدائرة (م).

■ قس طول كلٍ من القطر والأوتار، واملأ الجدول التالي :



|أب|	|أجـ|	|أد|	|أهـ|	|أو|	|أي|
٥٠ ملم					

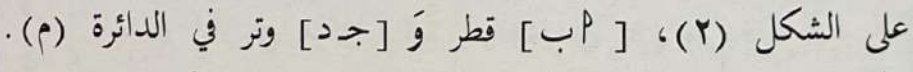
قارن النتائج واذكر ما تلاحظه بالنسبة لطول وتر، ولطول قطر في الدائرة.



شكل (٢)

على الشكل (٢)، [أب] قطر وَ [جـ د] وتر في الدائرة (م).

■ تتّبع الخطوات التالية، وأعط المبرّرات لكي تثبت أن :



|جـ د| < |أب|

١- |جـ د| < |م جـ| + |م د|

٢- |م جـ| + |م د| = |أب|

٣- |جـ د| < |أب| .

لاحظتَ وأثبتَّ ما يلي :

> القطر في دائرة هو أطول وتر فيها.

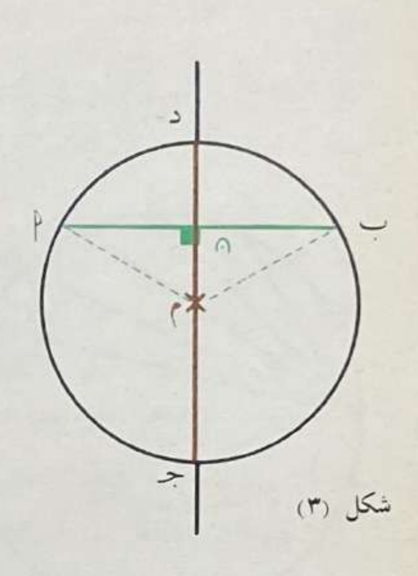
٢) القطر العمود على وتر

على الشكل (٣)، [جـ د] هو قطر في الدائرة (م)، وَ جـ د عمودي على الوتر [أ ب]، وَ { ه } = [أ ب] ∩ [جـ د].

■ قارن بواسطة المسطرة، أو الفرجار، أطوال القطعتين: [ه أ] وَ [ه ب]. ما هو المستقيم جـ د بالنسبة للقطعة [أ ب]؟

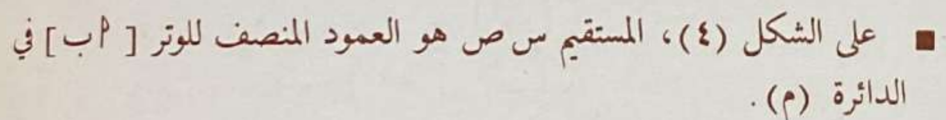
تتبّع الخطوات التالية، وأعط المبررات لكي تثبت ملاحظاتك السابقة:

١- | م أ | = | م ب |
٢- | ه أ | = | ه ب |
٣- جـ د هو العمود المنصف للقطعة [أ ب].



شكل (٣)

لاحظتَ وأثبتّ في نشاطك السابق ما يلي:

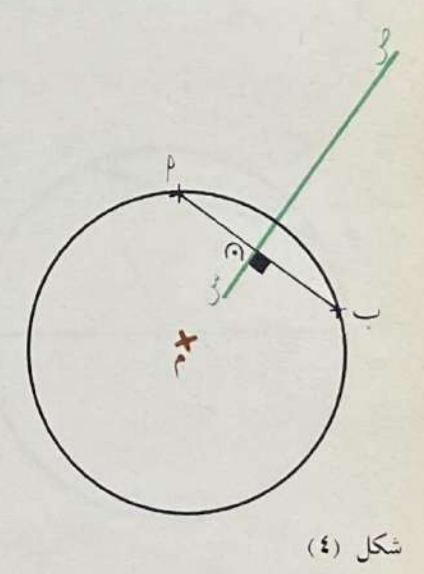


المستقيم المار في مركز دائرة، والعمودي على وتر فيها هو العمود المنصف لهذا الوتر.

■ على الشكل (٤)، المستقيم س ص هو العمود المنصف للوتر [أ ب] في الدائرة (م).

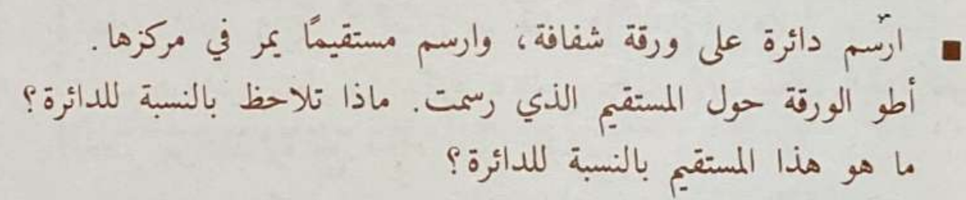
تحقّق من ذلك. ومدّ المستقيم س ص، وتحقّق من أن: م ∈ س ص.
تتبّع الخطوات التالية، وأعط المبرّرات لكي تثبت ملاحظتك السابقة:

١- | م أ | = | م ب |
٢- م تنتمي الى العمود المنصف للقطعة [أ ب]
٣- م ∈ س ص.

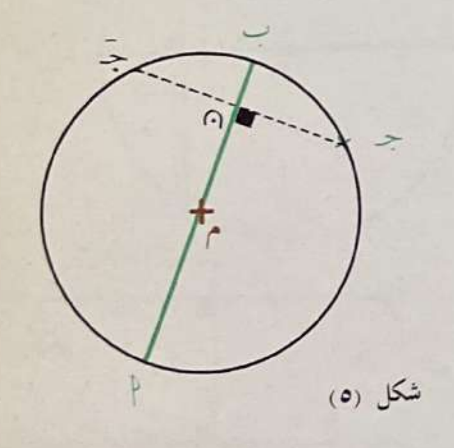


شكل (٤)

لاحظت وأثبتّ في نشاطك السابق ما يلي :



العمود المنصف لوتر دائرة يمرّ في مركز الدائرة.



شكل (٥)

٣) محاور تناظر الدائرة

■ ارسُم دائرة على ورقة شفافة، وارسم مستقيمًا يمر في مركزها.
أطو الورقة حول المستقيم الذي رسمت. ماذا تلاحظ بالنسبة للدائرة؟
ما هو هذا المستقيم بالنسبة للدائرة؟

على الشكل (٥)، [أب] قطر في الدائرة (م)، وَ جـ ∈ (م). أنزلنا من جـ العمود على أب، فقطعه في ه، وقطع الدائرة في النقطة جَ.

■ ما هو أب بالنسبة لـ [جـجَ]؟
كيف هما النقطتان: جـ وَ جَ بالنسبة للمستقيم أب؟
ما هي استنتاجاتك؟

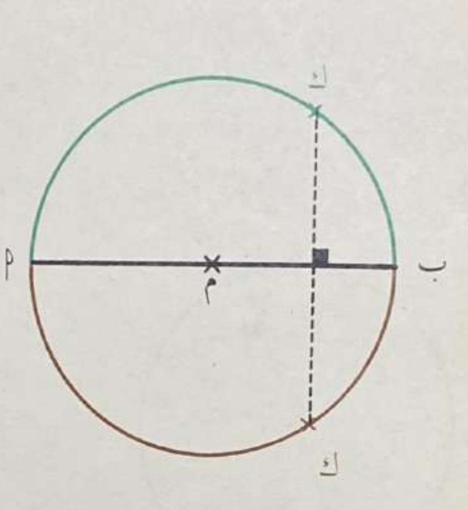
أثبتّ في النشاط السابق أن نظير النقطة جـ من الدائرة (م) بالتناظر حول المستقيم أب، هو نقطة من الدائرة. وهذا صحيح بالنسبة لكل نقطة من الدائرة.

وبالتالي، فإن كل قطر في الدائرة هو محور تناظر لها، وهذا ما لاحظته في

النشاط الأول بواسطة الطي.

نستنتج :

القطر في دائرة هو محور تناظر لها.

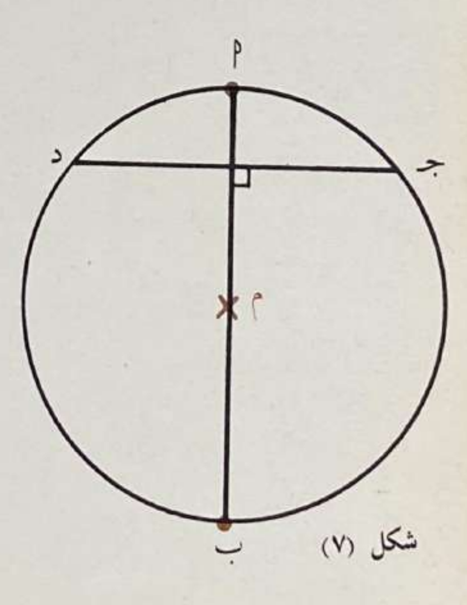


شكل (٦)

٤) نصف دائرة

على الشكل (٦)، [اب] هو قطر في الدائرة (م).
اب هو محور تناظر في الدائرة. وبالطي حول اب يتطابق الجزء الملوّن بالأخضر من الدائرة مع الجزء الملوّن بالبنّي.
لذلك نسمي كل جزء من هذين الجزءين **نصف دائرة** :

القطر في دائرة يجزّئ الدائرة إلى قوسين متطابقين، كل قوس منهما يسمّى نصف دائرة.



شكل (٧)

٥) منتصف قوس في دائرة

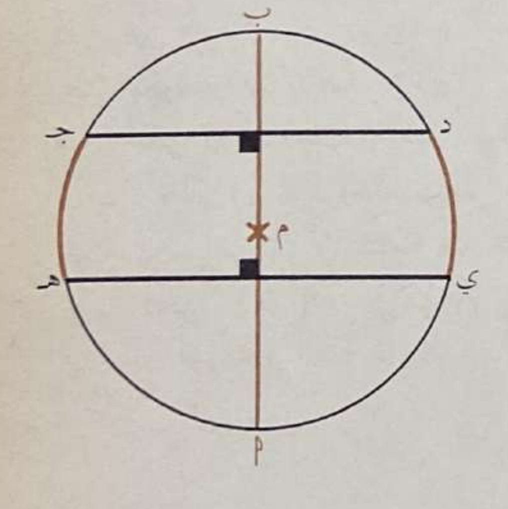
- ارسم دائرة على ورقة شفافة.
ارسم وترًا [جـ د] في الدائرة، ولوّن بلونين مختلفين القوسين المحدّدين به.

- ارسم القطر [اب] العمودي على الوتر [جـ د].
اطو الورقة حول اب واذكر ما تلاحظه بالنسبة للأقواس.

التناظر حول ٩ب يبيّن لنا أن القطر [٩ب] يجزّئ كلاً من القوسين: جـ ٩د وَ جـ ب د الى جزء ين متطابقين، بحيث إن نظير جـ ٩ هو د ٩، ونظير جـ ب هو د ب.

لذلك نسمي النقطة ٩ **منتصف** القوس جـ ٩د، ونسمّي النقطة ب منتصف القوس جـ ب د.

> القطر العمودي على وتر في دائرة يمر في منتصف القوس الذي طرفاه طرفا الوتر.



شكل (٨)

٦) الأقواس المحددة بين أوتار متوازية

على الشكل (٨) جـ د وَ هـ ي متوازيان. [٩ب] قطر في الدائرة عمودي على جـ د وَ هـ ي.

- ما هو نظير القوس د ي بالتناظر حول ٩ب؟

لو قمنا بعملية الطي حول ٩ب فماذا يحصل للقوسين: د ي وَ جـ هـ؟

ارسم شكلاً مشابهًا للشكل (٨)، وتحقق مما سبق.

> كل وترين متوازيين يحدان قوسين متطابقين.

تمارين

١) ارسم دائرة (م)، وعيّن فيها وترًا [أب].
ارسم القطر [هـ ي]، بحيث يكون هـ ي عموديًا على أب.
أثبت أن: | هـ أ | = | هـ ب | وَ | ي أ | = | ي ب |.

٢) أ وَ ب نقطتان من المستوى.
ارسم عدة دوائر، بحيث يكون [أب] وترًا في كلٍ منها.

٣)
أ – عيّن في دائرة (م) وترين: [أب] وَ [جـ د]، بحيث يكون أب وَ جـ د متوازيين.
ب – لتكن ن منتصف [أب]. ارسم العمود على أب، والمارّ في ن، وسمّه س ص.
أثبت أن س ص يمرّ في النقطة م.
جـ – لتكن {هـ} = س ص ∩ جـ د.
أثبت أن | هـ جـ | = | هـ د |.

٤)
أ – ارسم الدائرتين (م، ٣سم) وَ (م، ٥سم).
ب – عيّن وترًا [أب] في الدائرة الأولى.
جـ – عيّن النقطتين جـ وَ د نقطتي تقاطع الدائرة (م، ٥سم) مع المستقيم أب.
د – ارسم العمود على أب، والمار في م، وسمّ ن مسقط هذا العمود على أب.
هـ – سمّ جميع القطع المستقيمة على أب، والتي لها الطول نفسه.

٥) أ وَ ب نقطتان على دائرة (م).
قسّم القوس $\overset{\frown}{أب}$ إلى قوسين متطابقين.

٦) أ، ب، جـ ثلاث نقاط على دائرة (م).
حدّد القوس $\overset{\frown}{أهـ}$، بحيث يكون القوسان $\overset{\frown}{أهـ}$ وَ $\overset{\frown}{بجـ}$ متطابقين.

الدرس الثالث : الدائرة والمستقيم

١) وضع دائرة ومستقيم

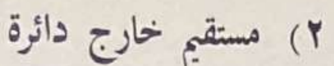
ارسم مستقيمًا س ص ، وعيّن نقطة م تبعد ٣سم عن س ص .
ارسم المستقيم العمودي على س ص ، والمارّ في م ، وَسمِّ ع مسقطَه على س ص .

- ارسم الدوائر : (م، ١سم)، (م، ٢سم)، (م، ٢٥ملم)، (م، ٢٨ملم) .
كيف هو تقاطع كلٍ من هذه الدوائر مع المستقيم س ص ؟
ارسم أية دائرة طول نصف قطرها أصغر من ٣سم .
كيف هو تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم س ص ؟

- ارسم الدوائر: (م، ٥سم)، (م، ٤سم)، (م، ٣٥ ملم) ، (م، ٣٢ ملم) .
كيف هو تقاطع كلٍ من هذه الدوائر مع المستقيم س ص ؟
ارسم أية دائرة طول نصف قطرها أكبر من ٣سم .
كيف هو تقاطع هذه الدائرة مع المستقيم س ص ؟

- ارسم الدائرة (م، ٣ سم) .
هل النقطة ع ∈ (م، ٣سم) ؟ لماذا ؟
خذ أية نقطة ب ∈ س ص ، ب ≠ ع .
قارن [م ع] وَ [م ب] . هل ب ∈ (م، ٣سم) ؟ لماذا ؟
ما هي المجموعة (م، ٣سم) ∩ س ص ؟
كيف هو المستقيم س ص بالنسبة لنصف القطر [م ع] ؟

٢) مستقيم خارج دائرة



لاحظت في النشاط الأوّل أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم س ص أكبر من طول نصف قطر الدائرة فإن تقاطع (م) مع س ص هو المجموعة الخالية.

نقول في هذه الحال: إن المستقيم س ص هو **خارج** الدائرة.

س ص خارج (م) تعني:

س ص ∩ (م) = ϕ

وتعني أيضًا:

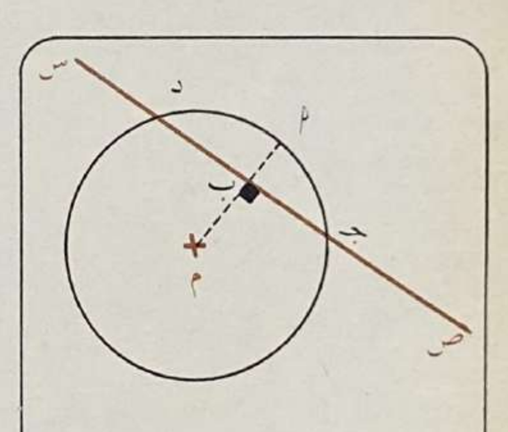
|م ب| > |م أ|

نقول عن مستقيم إنه خارج دائرة، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم أكبر من طول نصف القطر. وعندئذٍ جميع نقاط المستقيم هي خارج الدائرة.

٣) مستقيم قاطع لدائرة

لاحظت في النشاط الثاني أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم س ص أصغر من طول نصف قطر الدائرة، فإن (م) وَ س ص يتقاطعان في نقطتين.

نقول في هذه الحال: إن المستقيم س ص هو **قاطع** للدائرة.



س ص قاطع لِ (م) تعني:

س ص ∩ (م) = {جـ، د}

وتعني أيضًا:

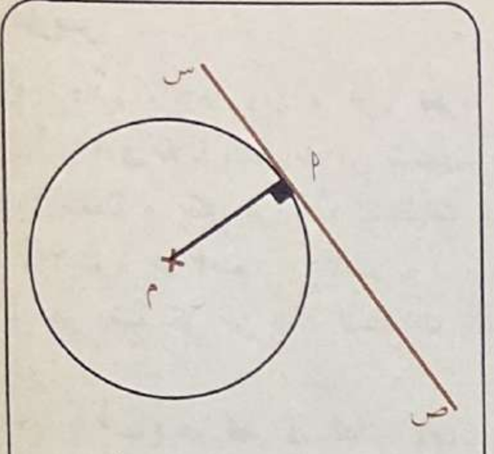
|م ب| < |م أ|

نقول عن مستقيم إنه قاطع لدائرة، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم أصغر من طول نصف القطر. وعندئذ يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطتين فقط.

٤) مستقيم مماس لدائرة

لاحظت في النشاط الثالث أنه بالنسبة لدائرة (م) ومستقيم س ص ، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة م والمستقيم تساوي طول نصف قطر الدائرة، فإن (م) وَ س ص يتقاطعان في نقطة واحدة.

نقول في هذه الحال : إن المستقيم س ص هو **مماس** للدائرة، ونسمي نقطة التقاطع نقطة التماس.



س ص مماس لـ (م) تعني :
س ص ∩ (م) = { ﺃ }
وتعني أيضًا :
المسافة بين م وَس ص تساوي طول نصف القطر.

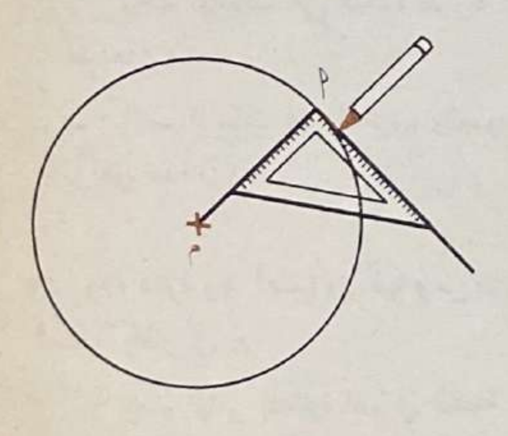
نقول عن مستقيم إنه مماس لدائرة، إذا كانت المسافة بين مركز الدائرة والمستقيم تساوي طول نصف القطر. وعندئذ يتقاطع المستقيم مع الدائرة في نقطة واحدة تسمى نقطة التماس.

ولاحظت أيضًا في النشاط نفسه الخاصية التالية للماس :

الماس لدائرة هو عمودي على نصف القطر المار في نقطة التماس.

٥) رسم مماس لدائرة

ﺃ هي نقطة تنتمي إلى الدائرة (م). لرسم الماس للدائرة (م)، والمار في ﺃ ، نرسم المستقيم العمودي على م ﺃ في النقطة ﺃ، كما هو مبيّن على الشكل (١).



شكل (١)

تماريـن

١) دائرة مركزها (م) وَ طول قطرها ٦م. س ص، ك ل، هـ ي ثلاثة مستقيمات من المستوى، بحيث إن المسافة بين النقطة م وكلٍ من هذه المستقيمات هي على التوالي: ٢٩٥سم، ٣٢٥سم، ٣٠٠سم.
ما هو وضع كلٍ من هذه المستقيمات بالنسبة للدائرة؟

٢) [أب] هو قطر في الدائرة (م).

أ – ارسم المماس للدائرة، والمارّ في أ، وسمّه س ص.
ارسم المماس للدائرة، والمار في ب، وسمّه ك ل.
ب– أثبت أن س ص وَ ك ل متوازيان.

٣) ارسم مماسّين متوازيين لدائرة معيّنة.

٤) ارسم دائرة (م)، ومستقيمًا س ص في المستوى؛ بحيث تكون المسافة بين م وَ س ص مختلفة عن طول نصف قطر الدائرة.
أ – ارسم المماسات على الدائرة الموازية لـ س ص. ما هو عددها؟

ب– ارسم المماسات على الدائرة، والعمودية على س ص.
ما هو عددها؟

٥) (م) دائرة وَ [أب] وتر فيها وَ س ص هو العمود على أب، والمار في م.
أ – ارسم المماس للدائرة المار في النقطة أ، وسمّ جـ، نقطة تقاطعه مع س ص.
ب– ارسم نظير الشكل الحاصل بالتناظر حول س ص.
جـ – أثبت أن جـ ب هو مماس للدائرة، وأن:
|أ جـ| = |جـ ب|.

٦) س ص مستقيم، وَ أ ∈ س ص.
ارسم عدة دوائر تمر في أ، وبحيث يكون س ص مماسًا لها.

٧) [م أ، م ب] قطاع زاوي.
ارسم عدة دوائر، بحيث يكون ضلعا القطاع مماسّين لها.

٨) أب جـ مثلث. ارسم دائرة، بحيث تكون أضلاع المثلث مماسات لها.

الدرس الرابع : رسم الدائرة

١) رسم دائرة بمعرفة ثلاث نقاط فيها

■ على الشكل (١) ثلاث نقاط أ ، ب ، جـ ليست على استقامة واحدة .
أين تقع النقاط التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين : أ وَ ب ؟
أين تقع النقاط التي تبعد البعد نفسه عن النقطتين : ب وَ جـ ؟
كيف تحدّد النقطة التي تبعد البعد نفسه عن النقاط الثلاث : أ ، ب ، جـ ؟

أ ب جـ

شكل (١)

لرسم دائرة تمر في النقاط : أ ، ب وَ جـ علينا تحديد مركز الدائرة ، وطول نصف قطرها .

مركز الدائرة هو نقطة تبعد البعد نفسه عن أ ، ب ، جـ وهي ، كما لاحظت في النشاط السابق ، نقطة تقاطع العمود المنصف للقطعة [أ ب] ، والعمود المنصف للقطعة [ب جـ] . أما طول نصف قطر الدائرة فهو المسافة بين هذا المركز وإحدى النقاط : أ ، ب ، جـ .

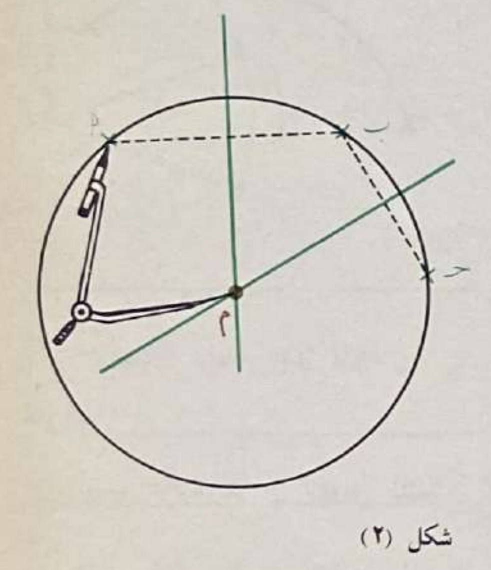
لرسم الدائرة التي تمر في النقاط : أ ، ب ، جـ نقوم إذن بالخطوات التالية (شكل ٢) :

أولاً : نرسم العمود المنصف للقطعة [أ ب] .

ثانيًا : نرسم العمود المنصف للقطعة [ب جـ] .

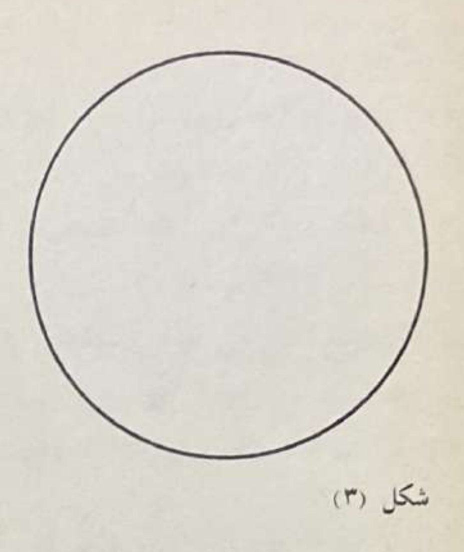
ثالثًا : نحدّد النقطة م ، نقطة تقاطع العمودين السابقين .

رابعًا : نفتح الفرجار ، ونثبت إبرته في م ، ونضع رأس قلمه على إحدى النقاط : أ ، ب أو جـ ونرسم الدائرة .



شكل (٢)

٢) تعيين مركز دائرة مرسومة



شكل (٣)

■ على الشكل (٣) دائرة مركزها غير معلوم.
اختر ثلاث نقاط : أ ، ب وَ جـ على الدائرة.

ارسم العمود المنصف لـ [أ ب]، والعمود المنصف لـ [ب جـ]، وَحدّد نقطة تقاطعهما م.

لقد حدّدت في النشاط السابق النقطة م؛ مركز الدائرة المعطاة.

٣) رسم دائرة بمعرفة قوس منها

■ على الشكل (٤) قوس دائرة $\overset{\frown}{\text{أب}}$.

اختر نقطة جـ تنتمي الى القوس، بحيث إن: جـ $\neq$ أ وَ جـ $\neq$ ب.
ارسم الدائرة التي تمرّ في : أ ، ب ، جـ كما ورد في الفقرة الأولى من هذا الدرس.

ب
أ

شكل (٤)

لقد رسمت في النشاط السابق الدائرة التي $\overset{\frown}{\text{أب}}$ هو قوس منها

تماريـن

١) ارسم دائرة تمرّ في رؤوس المثلث أ ب جـ.

٢) س ص مستقيم. أ وَ ب نقطتان، بحيث إن :

أ $\in$ س ص وَ ب $\notin$ س ص.
ارسم الدائرة التي تمر في أ وَب ؛ بحيث يكون س ص مماسًا لها.

الدّرس الخامس: الدّوران

١) ماهية الدوران

■ ثبّت إبرة الفرجار في م على الشكل (١)، وضع رأس القلم على أ. ما هو عدد الاتجاهات التي يمكن أن تتبّعها لرسم قوس دائرة انطلاقًا من وضعك هذا؟

ارسم قوسًا في الاتجاه الأول، وقوسًا اخر في الاتجاه الثاني، وسمّ أ' وَ أ'' الطرفَ الاخر لكل قوس.

× أ

× م

شكل (١)

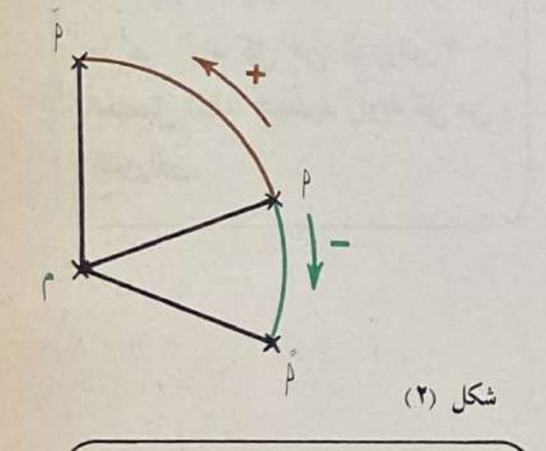
في نشاطك السابق حصلت على شكل يشبه الشكل (٢)، وقمت في كل مرة بعملية تسمى **دورانًا**.

أ' هي صورة أ بالدوران الأول.

أ'' هي صورة أ بالدوران الثاني.

الإتجاه الذي اتّبعناه للوصول إلى أ' هو الاتجاه المعاكس لاتجاه دوران عقارب الساعة، ويسمّى **الاتجاه الموجب**.

الإتجاه الذي اتّبعناه للوصول إلى أ'' هو اتجاه دوران عقارب الساعة، وَ يسمّى **الاتجاه السالب**.



شكل (٢)

في أي اتجاه تدور حول الكعبة؟

*** أي اتجاه دوران تتبع لفتح حنفية؟**
أي اتجاه دوران تتبع لفتح اسطوانة غاز؟

الزاوية $\widehat{\text{أ م أ'}}$ تحدّد مقدار الدوران الأول. وهي تساوي على الرسم ٧٠°.
نقول في هذه الحال: إن **زاوية الدوران** الذي قمنا به للوصول إلى أ' هي: +٧٠°، للتأكيد على أن الدوران حصل في الإتجاه الموجب.

الزاوية $\widehat{\text{أ م أ''}}$ تحدّد مقدار الدوران الثاني، وهي تساوي على الرسم ٤٠°.

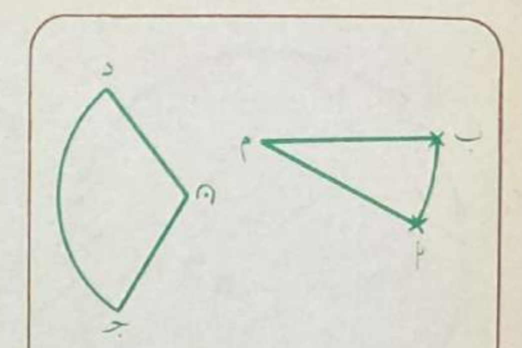
نقول في هذه الحال : إن زاوية الدوران الذي قمنا به للوصول الى أً هي − ٤٠°، للتأكيد على أن الدوران حصل في الإتجاه السالب.

■ على الشكل (٢)، أَ هي صورة أ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته + ٧٠°.

ما هي صورة أَ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته − ٧٠°؟

لاحظ في النشاط السابق أنه اذا كانت أَ صورة أ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته + ٧٠°؛ فإن الدوران الذي مركزه م، وزاويته − ٧٠°، يعيد أَ إلى وضعها الأول، أي إلى أ. لذلك نقول : إن الدوران الذي زاويته − ٧٠°، هو **الدوران المعاكس** للدوران الذي زاويته + ٧٠°.

كذلك فإن الدوران الذي مركزه م، وزاويته + ٤٠°، هو الدوران المعاكس للدوران − ٤٠°، والذي مركزه النقطة م نفسها (شكل ٢).



* على الرسم أعلاه ب هي صورة أ بدوران مركزه م. وَد هي صورة جـ بدوران مركزه ن.
ما هو اتجاه كل من الدورانين؟
استعمل المنقلة لتحديد زاوية كل من الدورانين.

٢) تعيين صورة نقطة بدوران معطًى

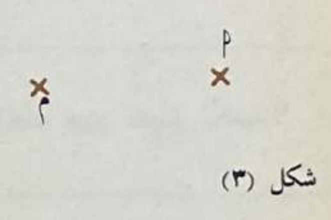
على الشكل (٣)، عيّنا النقطة م، والنقطة أ.

■ ارسم، مستعملاً المسطرة والمنقلة، نصف المستقيم [م س، بحيث إن $\widehat{أمس}$ = ٤٠°، وبحيث يكون الانتقال من [م أ إلى [م س بالإتجاه الموجب.

ارسم قوسًا مركزه م، وطول نصف قطره | م أ|.

حدّد النقطة أَ نقطة تقاطع القوس ونصف المستقيم [م س.

لقد عيّنت النقطة أَ؛ صورة النقطة أ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته + ٤٠°.



شكل (٣)

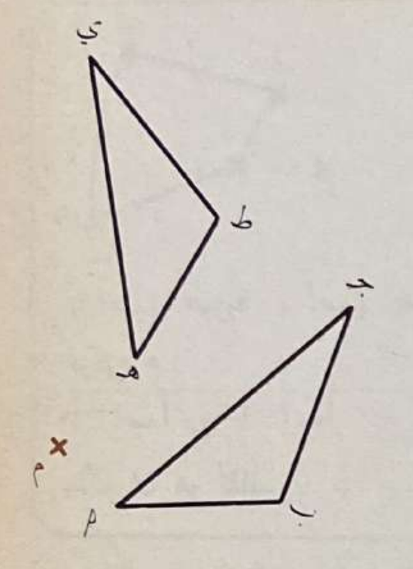
* ن وَ جـ نقطتان.
عيّن صورة جـ بالدوران الذي مركزه ن، وزاويته − ٢٠°.

٣) صورةُ شكل بدوران

■ على الشكل (٤) مثلثان: ﻫ ب جـ وَ هـ ط ي، وَ نقطة م.
تحقّق من أن النقاط: هـ، ط وَ ي هي صور النقاط: ﻫ، ب وَ جـ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته ٦٠°.

خذ نقطة س على أحد أضلاع المثلث ﻫ ب جـ.
عيّن صورة س بالدوران الذي مركزه م وزاويته ٦٠°. ماذا تلاحظ؟
خذ نقطة ص داخل المثلث ﻫ ب جـ. عيّن صورة ص بالدوران نفسه. ماذا تلاحظ؟

خذ نقطة ع خارج المثلث ﻫ ب جـ. عيّن صورة ع بالدوران نفسه. ماذا تلاحظ؟



شكل (٤)

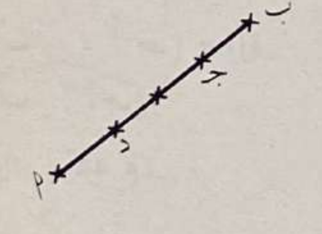
نقول أن المثلث هـ ط ي هو **صورة** المثلث ﻫ ب جـ بالدوران الذي مركزه م وزاويته ٦٠°.

> نقول عن شكل ص إنه صورة الشكل س بدوران، إذا كانت نقاط ص هي صور نقاط س بهذا الدوران.

٤) صورة قطعة مستقيم

■ [ﻫ ب] قطعة مستقيم. م نقطة من المستوى، والنقاط جـ، د، ... هي منتمية إلى [ﻫ ب].

ارسم صور النقاط: ﻫ، ب، جـ، د، .... بالدوران الذي مركزه



شكل (٥)

م، وزاويته − ٤٠°، وسمّها أَ، بَ، جَ، دَ، ...
ماذا تلاحظ بالنسبة لاستقامة هذه الصور؟
ما هي صورة القطعة [أب] بهذا الدوران؟
قارن طول [أب] بطول صورتها [أَبَ]. ماذا تلاحظ؟

[أَبَ] صورة [أب] بدوران مركزه م :
| أب | = | أَبَ |
الدوران هو تقايس.

> الدوران هو تقايس يحوّل كل قطعة مستقيم إلى قطعة مستقيم لها الطول نفسه.

٥) صورة قطاع زاوي

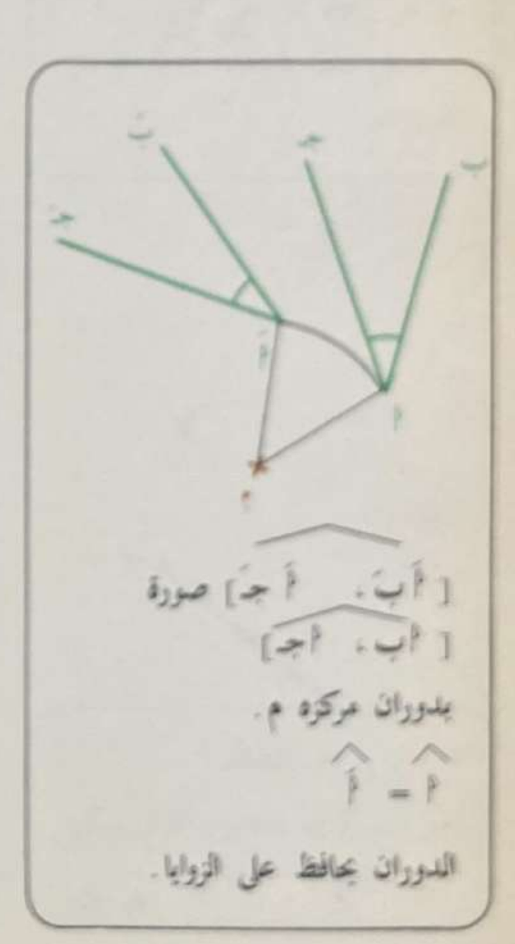
■ ارسم قطاعًا زاويًا [أب، أجـ]، وعيّن نقطة م.

ارسم صورة كل من [أب وَ [أجـ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته + ٥٠°، وسمّها [أَبَ وَ [أَجَ.

عيّن عدة نقاط منتمية إلى [أب، أجـ]، وحدّد صور هذه النقاط بالدوران نفسه. ماذا تلاحظ؟

ما هي صورة القطاع [أب، أجـ] بهذا الدوران؟

تحقّق من تطابق القطاعين: [أب، أجـ] وَ [أَبَ، أَجَ].



[أَبَ، أَجَ] صورة [أب، أجـ] بدوران مركزه م.
أ = أَ
الدوران يحافظ على الزوايا.

من النشاط السابق نستنتج:

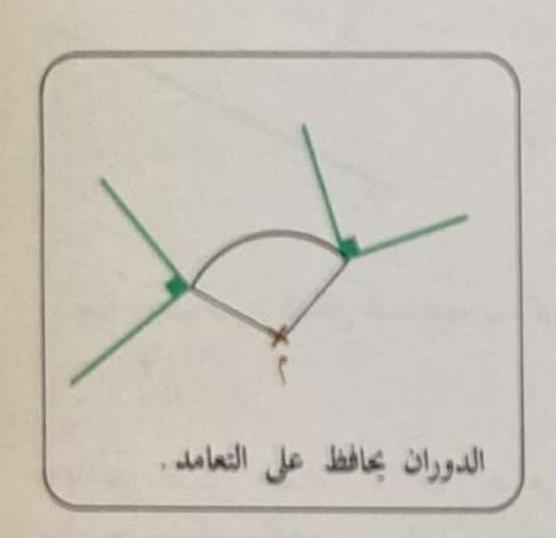
> الدوران يحوّل كل قطاع زاوي إلى قطاع زاوي متطابق معه.
> نقول: إن الدوران يحافظ على الزوايا.

وهكذا، فإن صورة قطاع زاوي قائم بدوران، هو قطاع زاوي قائم. وبالتالي، فإن صورتي مستقيمين متعامدين هما مستقيمان متعامدان. إذن: الدوران يحافظ على التعامد، أي إنه يحوّل مستقيمين متعامدين إلى مستقيمين متعامدين.

٦) التناظر حول نقطة والدوران

■ عيّن نقطتين: م وَ أ.

عيّن النقطة أَ، صورة أ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته ١٨٠°.
كيف هما النقطتان أ وَ أَ بالنسبة للنقطة م؟ ماذا تستنتج؟



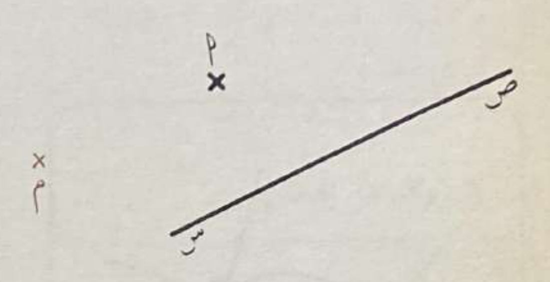
الدوران يحافظ على التعامد.

التناظر حول نقطة هو دوران مركزه النقطة، وزاويته ١٨٠°.

تماريـن

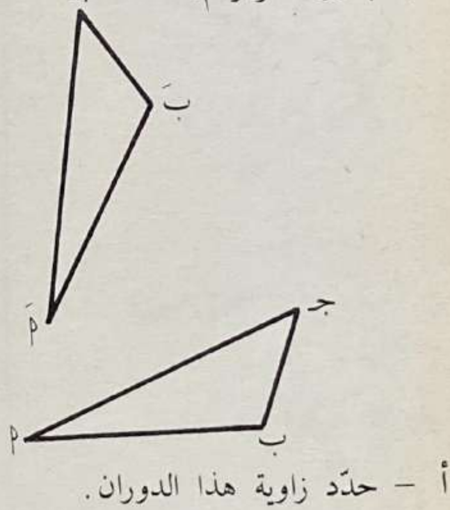
١)

أ – ارسم صورة الشكل التالي بدوران مركزه م ، وزاويته ٣٠° :



ب– ارسم صورة الشكل نفسه بدوران مركزه م ، وزاويته – ٥٠° .

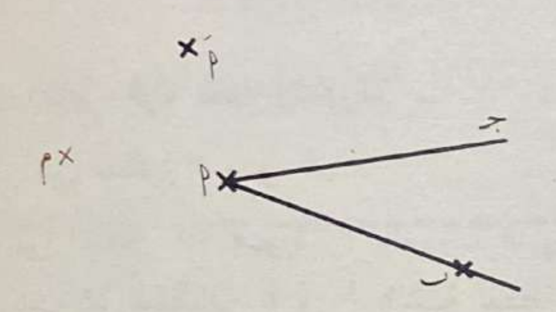
٢) على الشكل ادنـاه : أَ، بَ، جَ هي صور أ ، ب، جـ بدوران مركزه م .



أ – حدّد زاوية هذا الدوران .

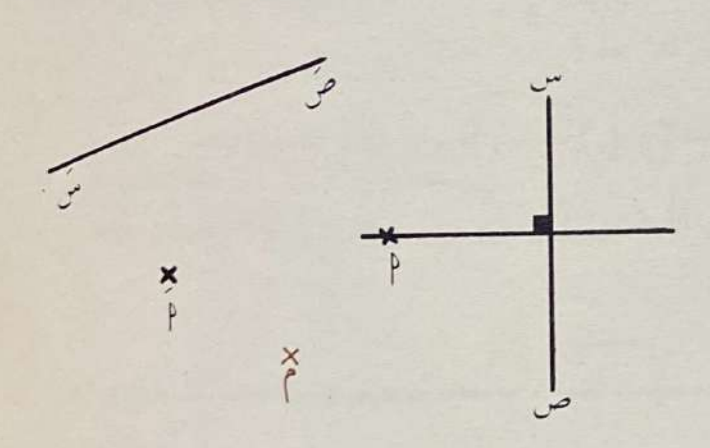
ب– عيّن على الرسم القطع المستقيمة التي لها الطول نفسه ، والزوايا المتساوية واذكر السبب .

٣) على الشكل أدناه أَ وَ بَ هما صورتا أ وَ ب بدوران مركزه م .



استعمل المنقلة والمسطرة فقط لإكمال رسم صورة الشكل بهذا الدوران .

٤) على الشكل أدناه ، أَ هي صورة أ بدوران مركزه م . سَ صَ هي صورة س ص بالدوران نفسه .



استعمل مثلث الرسم فقط لإكمال صورة الشكل بهذا الدوران .

٥) م وَ ﴿ نقطتان من المستوى.

أ - ارسم صورة ﴿ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته +٧٠°، وسمّها ﴿َ.

ب- ارسم صورة ﴿َ بالدوران الذي مركزه م، وزاويته +١١٠°، وسمّها ﴿ً.

جـ- ما هو الدوران الذي ينقلنا من ﴿ إلى ﴿ً؟

د - كيف هما النقطتان ﴿ وَ ﴿ً بالنسبة للنقطة م؟

الفصل الثالث عشر :

العلاقات

الدّرس الأول : العَلاقات

الدّرس الثاني : تمثيل العَلاقات

الدّرس الأول : العَلاقات

١) ماهية العلاقة

سـ = {الرياض، لندن، دمشق، بيروت، واشنطن}
صـ = {إنجلترة، لبنان، المملكة العربية السعودية، تركيا} هما مجموعتان.

كلمة «عاصمة» تربط بعض عناصر المجموعة **سـ** ببعض عناصر المجموعة **صـ**.

■ اكتب الجمل من نوع :

.... هي عاصمة ....

بحيث تكون الكلمة الأولى عنصرًا في **سـ**، والثانية عنصرًا في **صـ**.

اكتب بجدولة العناصر المجموعة الجزئية من **صـ** التي كل عنصر منها له عاصمة في **سـ**.

في النشاط السابق حدّدنا مجموعتين **سـ** وَ **صـ**، ورابطًا بين بعض عناصر المجموعة الأولى ببعض عناصر المجموعة الثانية.

نقول إننا حدّدنا **علاقة من س نحو صـ**.

المجموعة الأولى **سـ** تسمى **مجال العلاقة**.

المجموعة الثانية **صـ** تسمى **المجال المقابل للعلاقة**.

المجموعة الجزئية من المجموعة الثانية التي ترتبط عناصرها بعناصر المجموعة الأولى تسمى : **مدى العلاقة**.

وَوجدت في النشاط ان مدى العلاقة هو:

{إنجلترة، لبنان، المملكة العربية السعودية}.

الجملة : «هي عاصمة» ، تسمى : **قاعدة العلاقة** ، وهي التي تحدد الرابط بين عناصر المجال، والمجال المقابل.

إنجلترة هي **صورة** لندن بالعلاقة. كذلك المملكة العربية السعودية هي صورة الرياض بالعلاقة.

٢) العلاقة والأزواج المرتبة

س = {٢، ٣، ٥، ١١ }

ص = {٦، ١٧، ٣٥، ٩٦، ٢٥٠ }

حدّدنا العلاقة من **س** نحو **ص** التي قاعدتها «هو قاسم لـ».

■ ما هو مجال العلاقة؟

ما هو المجال المقابل للعلاقة؟

ما هو مدى العلاقة؟

اكتب جميع الأزواج المرتبة (أ، ب)، بحيث يكون أ ∈ **س**، ب ∈ **ص** وَ أ هو قاسم لـ ب.

■ **س** = {٤، ٦، ٧، ١٥، ٢٥ }.

ص = {٢، ٣، ٥، ١١ }.

الأزواج المرتبة: (٤، ٢)، (٦، ٢)، (٦، ٣)، (١٥، ٣)، (١٥، ٥)، (٢٥، ٥)،

حدّها الأول في **س**، وحدّها الثاني في **ص**.

ما هي قاعدة العلاقة من **س** نحو **ص**، التي تربط الحدّ الأول من كل زوج مرتب بالحدّ الثاني منه؟

لاحظت في النشاط الأول أن علاقة من **سـ** نحو صـ محدّدة بقاعدة مكّنتك من تحديد أزواج مرتبة حدّها الأول في **سـ**، وحدّها الثاني في صـ. وهي :

(٢، ٦)، (٢، ٩٦)، (٢، ٢٥٠)، (٣، ٦)، (٣، ٩٦)، (٥،٣٥)، (٥، ٢٥٠).

ولاحظت في النشاط الثاني أن أزواجًا مرتبة : حدّها الأول في **سـ**، وحدّها الثاني في صـ، تحدّد علاقة من **سـ** نحو صـ، قاعدتها هي : «هو مضاعف».

نستنتج إذن :

> تحدّد علاقة ما من مجموعة **سـ** نحو المجموعة صـ بتحديد مجالها **سـ**، ومجالها المقابل صـ، ومجموعة أزواج مرتبة : حدّها الأول في **سـ**، وحدّها الثاني في صـ.

تمارين

١)

س = {احمد، سامي، بشّار، بلال، فادي }

ص = {إيران، باكستان، تركيا، سيلان }

حدّدنا العلاقة من س نحو ص بالقاعدة :

«يبدأ بالحرف نفسه».

أ – حدّد صور كل من : أحمد، سامي، بشّار، بلال، فادي، بهذه العلاقة.

ب – ما هو مجال العلاقة؟ ما هو مجالها المقابل؟ ما هو مداها؟

جـ – اكتب الأزواج المرتبة التي تحدد هذه العلاقة.

٢)

س = {ب، جـ، س، ل، ي }

ص = {خالد، سيف، شمس، باب، عمر }

عرّفنا العلاقة من س نحو ص التي قاعدتها «حرف من كلمة».

أ – ما هو مجال هذه العلاقة؟ ما هو مجالها المقابل؟ ما هو مداها؟

ب – اكتب الأزواج المرتبة التي تحددها.

٣)

س = {٢، ٤، ٦، ٨ }

ص = {أ ∈ ك : ١٠ ≤ أ < ٥٠ }

عرّفنا العلاقة من س نحو ص بالأزواج المرتبة :

(٢، ١٠)، (٤، ٢٠)، (٦، ٣٠)، (٨، ٤٠).

أ – ما هو مدى هذه العلاقة؟

ب – اكتب قاعدة لهذه العلاقة.

٤)

س = {٣، ٩، ٢٣، ٤٥ }

ص = {٢، ٧، ١٥، ٢٩ }

أ – اكتب الأزواج المرتبة التي تحدّد العلاقة من س نحو ص ، والتي قاعدتها : «أكبر من».

ب – الأزواج المرتبة : (٣، ٧)، (٣، ١٥)، (٣، ٢٩)، (٩، ١٥)، (٩، ٢٩)، (٢٣، ٢٩) تحدّد علاقة من س نحو ص .

اكتب قاعدة لهذه العلاقة.

٥) عرّفنا العلاقة من مجموعة الأعداد الكلية ك نحو ك بالأزواج المرتبة : (أ، ب)، حيث : ب = ٢ أ.

أ – ما هي هذه الأزواج المرتبة؟

ب – اكتب قاعدة تحدد هذه العلاقة.

جـ – ما هو مدى هذه العلاقة؟

الدّرس الثاني : تمثيل العَلاقات

١) **تمثيل العلاقات**

س = {أحمد، سامي، بشّار، بلال، فادي }

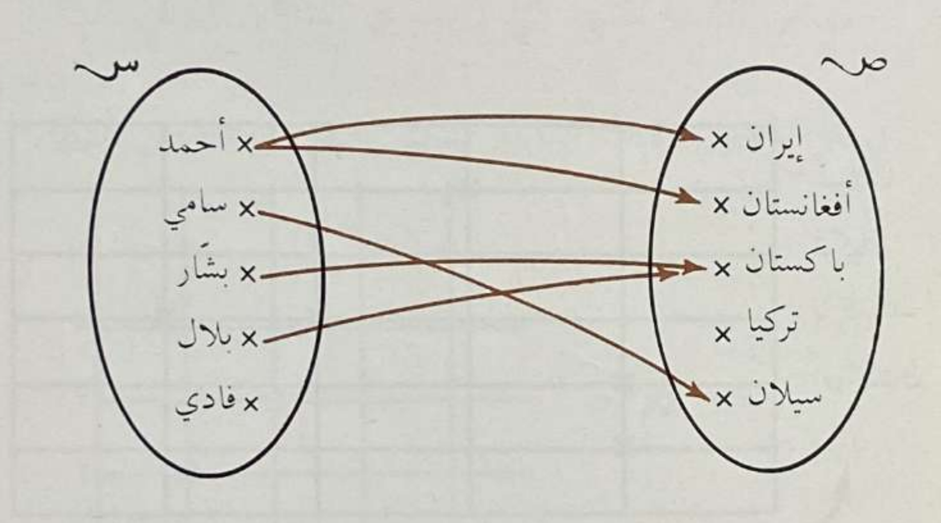
ص = {إيران، أفغانستان، باكستان، تركيا، سيلان }

حدّدنا العلاقة من **س** نحو **ص** بالأزواج المرتبة :

(أحمد، إيران) ؛ (أحمد، أفغانستان) ؛ (سامي، سيلان) ؛ (بشّار، باكستان) ؛ (بلال، باكستان) ؛ والتي قاعدتها : «يبدأ بالحرف نفسه» .

نمثّل هذه العلاقة بإحدى الطرق التالية :

التمثيل بواسطة الرسم السهمي : تنطلق الأسهم من عناصر المجال متجهة نحو عناصر المجال المقابل.

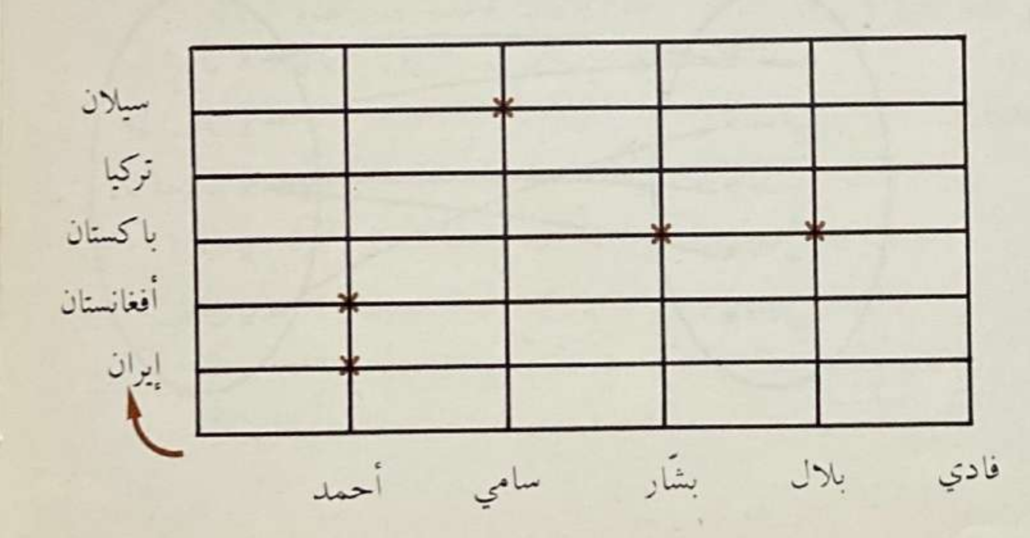


ينطلق السهم من تمثيل الحدّ الأول لزوج مرتب ، لينتهي عند تمثيل الحدّ الثاني لهذا الزوج المرتب.

التمثيل بواسطة جدول : السهم في الأعلى على اليمين يبيّن الانطلاق من المجال نحو المجال المقابل

	إيران	أفغانستان	باكستان	تركيا	سيلان
أحمد	×	×			
سامي					×
بشّار			×		
بلال			×		
فادي					

التمثيل بواسطة شبكة تربيع : السهم في الأسفل على اليسار يبيّن الانطلاق من المجال نحو المجال المقابل.



٢) تفسير العلاقات

- على الشكل (١) مثّلنا بواسطة الرسم السهمي علاقةً.
ما هو مجال هذه العلاقة؟
ما هو المجال المقابل لهذه العلاقة؟
ما هو مدى هذه العلاقة؟
عيّن قاعدة تحدد هذه العلاقة.

س: ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

ص: ١ ٣ ٤ ٧ ٩ ١٧ ٢٥

شكل (١)

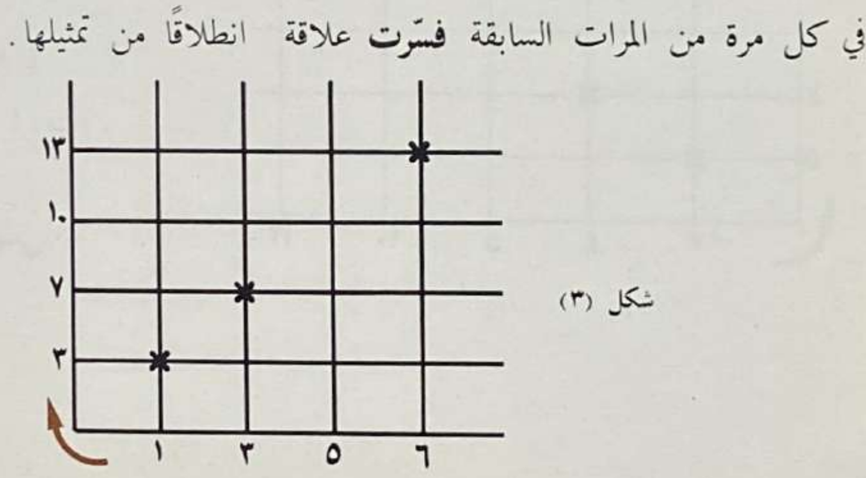
- على الشكل (٢) مثّلنا بواسطة جدول علاقةً.
ما هو مجال هذه العلاقة؟
ما هو المجال المقابل لهذه العلاقة؟
ما هو مدى هذه العلاقة؟
عيّن قاعدة تحدّد هذه العلاقة.

	٣	٦	٩	١٢
١	×			
٢		×		
٣			×	
٤				×

شكل (٢)

- على الشكل (٣) مثّلنا بواسطة شبكة تربيع علاقةً.
أجب عن الأسئلة نفسها التي وردت في النشاطين السابقين.

في كل مرة من المرات السابقة **فسّرت** علاقة انطلاقاً من تمثيلها.



شكل (٣)

تماريـــن

١)

س = {محمد، أسامة، صقر، زهير }.

عمر محمد ١١ سنة ، عمر أسامة ١٢ سنة . يزيد عمر صقر على عمر محمد سنتين. ووُلد زهير في العام نفسه الذي وُلد فيه أسامة .

أ – أكتب مجموعة الأعمار ص .

ب– مثّل بالطرق الثلاث العلاقة من س نحو ص .

٢)

س = {٨، ١٠، ١٢، ١٥، ٢٠ }

ص = {٤، ٥، ٦، ٧ }

عرّفنا العلاقة من س نحو ص ، والتي قاعدتها « ضعفا » .

مثّل هذه العلاقة بالطرق الثلاث .

٣)

ع = {أ ∈ ك : ٠ < أ < ٥ }

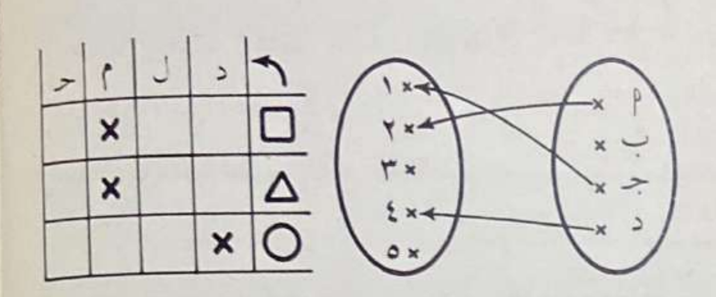
ج = {ب ∈ ص : −٥ < أ < +٥ }

عرّفنا العلاقة من ع نحو ج بالأزواج المرتبة (أ ، ب) ، حيث : ب = ٢ أ − ٣.

أ – مثّل هذه العلاقة بواسطة الرسم السهمي .

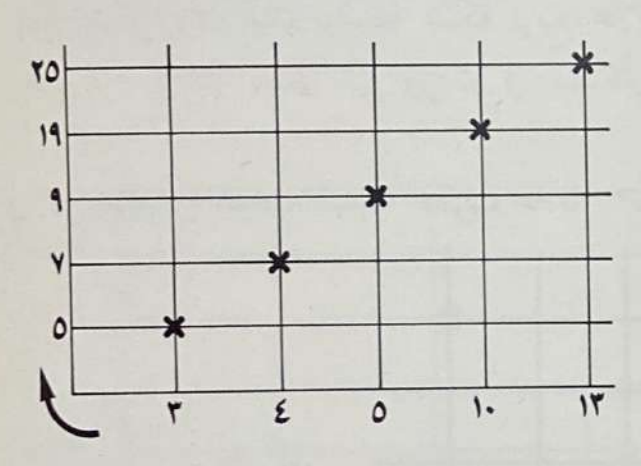
ب– مثّل هذه العلاقة بواسطة جدول .

٤) مثّلنا علاقة على كلّ شكل من الشكلين التاليين :



حدّد في كل مرة المجال والمجال المقابل والمدى. وفسّر العلاقة إذا أمكن .

٥) على الشكل التالي مثّلنا علاقة :



أ – حدّد مجال العلاقة، ومجالها المقابل، ومداها.

ب– املأ الجدول التالي حيث ص هي صورة س بالعلاقة. وفسّر هذه العلاقة.

س	٣				
ص	٥				

الفصل الرابع عشر :

المحور والمستوى الديكارتي ص × ص

الدّرس الأول : المِحوَر

١) ماهية المحور

سَ س مستقيم، وَ م نقطة عليه (شكل ١).

على سَ س اتجاهان : من م نحو س وَ من م نحو سَ.

عندما نختار واحدًا من الاتجاهين، نضع على المستقيم سَ س سهمًا يدل على الاتجاه المختار، ونسمي هذا الاتجاه : **الاتجاه الموجب**. أما الاتجاه الآخر، فيسمى عندئذ : **الاتجاه السالب**.

لقياس الطول على هذا المستقيم نعيّن وحدة للطول ؛ فعلى الشكل (١) مثلاً، وحدة الطول هي : طول [م ب].

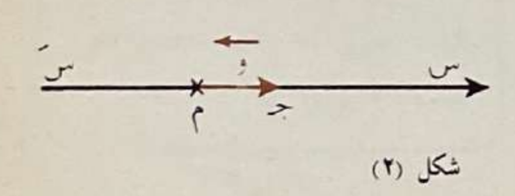
نقول عندئذ : إن سَ س هو **محور**، والنقطة م تسمى **أصل** المحور.

شكل (١)

> المحور هو مستقيم حدّدت عليه ثلاثة عناصر :
>
> ١) المنحى : وهو واحد من اتجاهي المستقيم، ويسمّى الاتجاه الموجب.
>
> ٢) نقطة : تسمّى الأصل.
>
> ٣) وحدة للطول.

في كثير من الأحيان نعيّن وحدة الطول كمقياس لمتّجه محدد على المحور، منحاه منحى المحور.

فعلى المحور سَ س مثلاً (شكل ٢)، الوحدة ممثلة بمقياس المتّجه $\overleftarrow{\text{م جـ}}$.

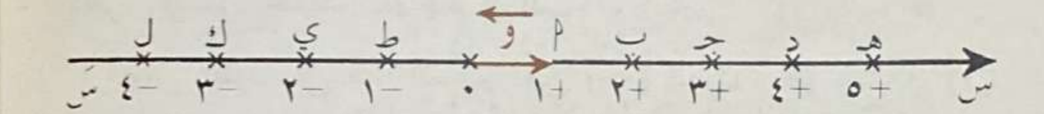


شكل (٢)

في هذه الحال نسمي المتّجه $\overleftarrow{م ج}$: **المتجه الواحدي**، ونرمز له بحرف واحد مثلاً $\overleftarrow{و}$: $\overleftarrow{م ج} = \overleftarrow{و}$.

المتّجه الواحدي هو متّجه على محور له منحى المحور، ومقياسه وحدة الطول.

٢) المحور، وتمثيل الأعداد الصحيحة



شكل (٣)

على الشكل (٣) سَس هو محور أصله م، $\overleftarrow{و}$ وهو المتّجه الواحدي عليه.
قسّمنا نصف المستقيم [م س إلى قطع متطابقة، طول الواحدة منها هو طول الوحدة على المحور؛ فحصلنا على النقاط : ٮ، ب، جـ، د، هـ، ...
وقسّمنا بالطريقة نفسها نصف المستقيم [م سَ، وحصلنا على النقاط : ط، ي، ك، ل، ...
مقابل النقاط كتبنا الأعداد الصحيحة، كما هو مبيّن على الشكل أعلاه.
لقد **مثّلنا** الأعداد الصحيحة على المحور سَس .

* مثّل الأعداد الصحيحة على محور، طول الوحدة عليه ١٥ ملم.

٣) إحداثي نقطة على المحور

على الشكل (٣) كل نقطة يقابلها عدد صحيح. نسمي هذا العدد الصحيح **إحداثي** هذه النقطة.

وهكذا فإحداثي النقطة جـ هو + ٣، ونكتب : **جـ (+٣)**، كذلك إحداثي النقطة ي هو −٢، ونكتب : ي (−٢)، أما بالنسبة للأصل م فنكتب : م (٠).

٤) القياس الجبري لمتّجه

شكل (٤)

على الشكل (٤) : مثّلنا المحور سَ س، وَ المتجهين $\overleftarrow{أب}$، وَ $\overleftarrow{جـد}$.

■ ما هو مقياس المتجه $\overleftarrow{أب}$ بالنسبة لوحدة الطول على المحور؟
ما هو منحى المتّجه بالنسبة لمنحى المحور؟
أجب عن الأسئلة نفسها بالنسبة للمتّجه $\overleftarrow{جـد}$.

لاحظت أن مقياس المتجه $\overleftarrow{أب}$ هو (٢)، وأن اتجاهه موجب. كما لاحظت أن مقياس المتجه $\overleftarrow{جـد}$ هو (٣)، وأن اتجاهه سالب.

نقول : إن **القياس الجبري** للمتّجه $\overleftarrow{أب}$ هو (+٢)، ونرمز له بالرمز : $\overline{أب}$، ونكتب :

$\overline{أب}$ = +٢

كما نقول : إن القياس الجبري للمتّجه $\overleftarrow{جـد}$ هو (−٣)، ونرمز له بالرمز : $\overline{جـد}$، ونكتب :

$\overline{جـد}$ = −٣

* النقاط : (أ، ب، جـ، د) هي النقاط المعيّنة على المحور في الشكل (٤).
*) املأ الفراغات فيما يلي :
$\overline{م أ}$ = ...
$\overline{م جـ}$ = ...
$\overline{جـ ب}$ = ...
$\overline{ب د}$ = ...
*) عيّن على الشكل نفسه متجهًا قياسه الجبري (+١٠)، ومتجهًا آخر قياسه الجبري (−٨).

٥) القياس الجبري وإحداثي نقطة

د ب م أ جـ

س َ س

شكل (٥)

■ على المحور في الشكل (٥) حدّدنا النقاط : أ ، ب ، جـ ، د .
املأ الفراغات فيما يلي :

$\overline{\text{م أ}}$ = ... ، $\overline{\text{م ب}}$ = ... ، $\overline{\text{م جـ}}$ = ... ، $\overline{\text{م د}}$ = ...

ما هو إحداثي كل من النقاط : أ ، ب ، جـ ، د على المحور ماذا تلاحظ ؟

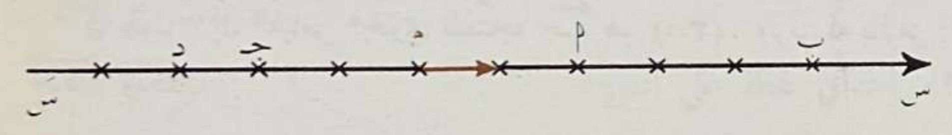
لاحظت في النشاط السابق أن إحداثي النقطة أ يساوي $\overline{\text{م أ}}$ ، وكذلك بالنسبة للنقاط الأخرى.

نستنتج :

> إحداثي نقطة أ على محور أصله م هو القياس الجبري للمتّجه $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ، ورمزه $\overline{\text{م أ}}$.

> ** على محور أصله م ، حدّدنا النقاط : أ (+٧) ، ب (−٢) جـ (−٩) .**
> **املأ الفراغات فيما يلي :**
> $\overline{\text{م أ}}$ = ...
> $\overline{\text{م ب}}$ = ...
> − ٩ = ...

٦) حساب القياس الجبري لمتجه على محور



شكل (٦)

■ على المحور في الشكل (٦)، حدّدنا النقاط : أ، ب، جـ، د.

املأ الفراغات فيما يلي، وقارن الأجوبة في كل مرة :

$\overline{أب}$ = ... ؛ $\overline{مب}$ − $\overline{مأ}$ = (....) − (....) = ...

$\overline{أجـ}$ = ... ؛ $\overline{مجـ}$ − $\overline{مأ}$ = (....) − (....) = ...

$\overline{بجـ}$ = ... ؛ $\overline{مجـ}$ − $\overline{مب}$ = (....) − (....) = ...

$\overline{دب}$ = ... ؛ $\overline{مب}$ − $\overline{مد}$ = (....) − (....) = ...

$\overline{بأ}$ = ... ؛ $\overline{مأ}$ − $\overline{مب}$ = (....) − (....) = ...

$\overline{دجـ}$ = ... ؛ $\overline{مجـ}$ − $\overline{مد}$ = (....) − (....) = ...

لاحظت في النشاط ما يلي :

أيًّا كان وضع متّجه على محور أصله م، فإن القياس الجبري لهذا المتّجه، هو حاصل طرح إحداثي أصل المتّجه من إحداثي طرفه.

$\overline{أب}$ = $\overline{مب}$ − $\overline{مأ}$

٧) **حساب طول قطعة مستقيم على محور**

طول قطعة مستقيم [أب]، هي مقياس المتّجه $\overleftarrow{أب}$.

ومقياس المتّجه $\overleftarrow{أب}$ هو القيمة المطلقة لقياسه الجبري، وبالتالي فإن :

| أب | = | $\overline{مب}$ − $\overline{مأ}$ |

تماريـــن

١) على محور حيث طول الوحدة هو السنتيمتر، ضع النقاط التالية المعروفة بإحداثياتها:

أ (−٨)؛ ب (+٤)، جـ (−١)، د (٥)، م (٠).

٢) على محور أصله م، حدّدنا النقاط:

أ (+٢)، ب (+٥)، جـ (−٢)، د (−٦).

أ – أحسب: $\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{ب أ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$، $\overline{\text{جـ د}}$، $\overline{\text{م د}}$، $\overline{\text{د م}}$.

ب– إحسب: $|\text{أ ب}|$، $|\text{ب جـ}|$، $|\text{جـ د}|$.

٣) ضع على محور أصله م النقاط: (أ، ب، جـ، د)، بحيث يكون:

$\overline{\text{م أ}}$ = +٤؛ $\overline{\text{م ب}}$ = − ٢؛ $\overline{\text{ب جـ}}$ = + ١؛ $\overline{\text{جـ د}}$ = − ٥.

أ – إحسب: $\overline{\text{م د}}$؛ $\overline{\text{د أ}}$؛ $\overline{\text{جـ م}}$.

ب– جد مقاييس المتّجهات: $\overleftarrow{\text{م د}}$، $\overleftarrow{\text{د أ}}$، $\overleftarrow{\text{جـ م}}$

٤) أ، ب، د: ثلاث نقاط على محور أصله م. نعرف إحداثيات هذه النقاط: $\overline{\text{م أ}}$، $\overline{\text{م ب}}$، $\overline{\text{م جـ}}$. ما هي إحداثيات صور هذه النقاط بانسحاب له الإتجاه الموجب للمحور، ومقياسه ٣؟ ما هي صورة م بهذا الإنسحاب؟

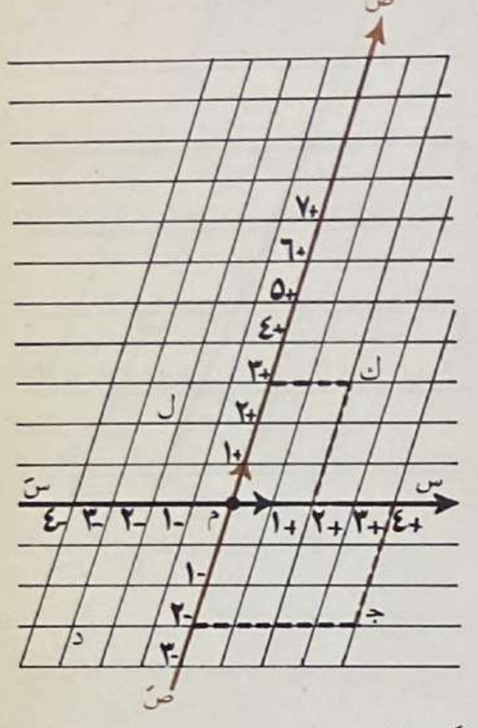
٥) أ (+٥)، ب (−٥)، جـ (−٣) ثلاث نقاط على محور أصله م.

ن نقطة على المحور، بحيث: $\overline{\text{م ن}}$ = +٣.

أبقينا الوحدة ذاتها على المحور، واخذنا النقطة ن كأصل. ما هي إحداثيات النقاط: أ، ب، جـ على المحور الجديد؟

الدرس الثاني : تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى

١) محاور شبكة تربيع



شكل (١)

الشكل (١) هو شبكة تربيع ، ميّزنا عليه المحور سَ س ، وأصله م ؛ والمحور صَ ص ، وأصله أيضًا م .

المستقيمات الموازية للمستقيم صَ ص تقسّم المستقيم سَ س إلى قطع متتالية ومتطابقة ، ونقاط تقاطع هذه المستقيمات مع سَ س هي تمثيل لمجموعة الأعداد الصحيحة .

كذلك نقاط تقاطع صَ ص مع المستقيمات الموازية لـ سَ س ، هي تمثيل اخر لمجموعة الأعداد الصحيحة .

كل نقطة من عقد شبكة التربيع هي نقطة تقاطع مستقيمين موازيين لـ صَ ص وَ سَ س .

النقطة ك مثلاً ، هي نقطة تقاطع مستقيمين :

الأول موازٍ لـ صَ ص ، ويتقاطع مع سَ س في النقطة الممثّلة للعدد +٢ ، فنقول : إن (+٢) هو **الإحداثي السيني** للنقطة ك .

الثاني موازٍ لـ سَ س ، ويتقاطع مع صَ ص في النقطة الممثلة للعدد +٣ ، فنقول : إن (+٣) هو **الإحداثي الصادي** للنقطة ك . المحور سَ س يسمّى **محور الإحداثيّات السينية** ، والمحور صَ ص يسمى **محور الإحداثيات الصادية** .

* حدد على الشكل (١) الإحداثي السيني ، والإحداثي الصادي لكل من النقاط : ل ، جـ ، د ، م .

٢) تمثيل الأزواج المرتبة

■ على شبكة التربيع (شكل ٢)، عيّن النقاط التالية، حيث حدّدنا إحداثيها السيني وإحداثيّها الصادي:

أ (الإحداثي السيني: +١؛ الإحداثي الصادي: +٢)

ب (الإحداثي السيني: صفر؛ الإحداثي الصادي: −٣)

حتى لا نكرّر في كل مرة ذكر الإحداثي السيني والإحداثي الصادي، نكتب باختصار: أ (+١، +٢) وَ ب (٠، −٣).

ونقول: إن أ هي تمثيل للزوج المرتب (+١، +٢). وكذلك ب، هي تمثيل للزوج المرتب (٠، −٣).

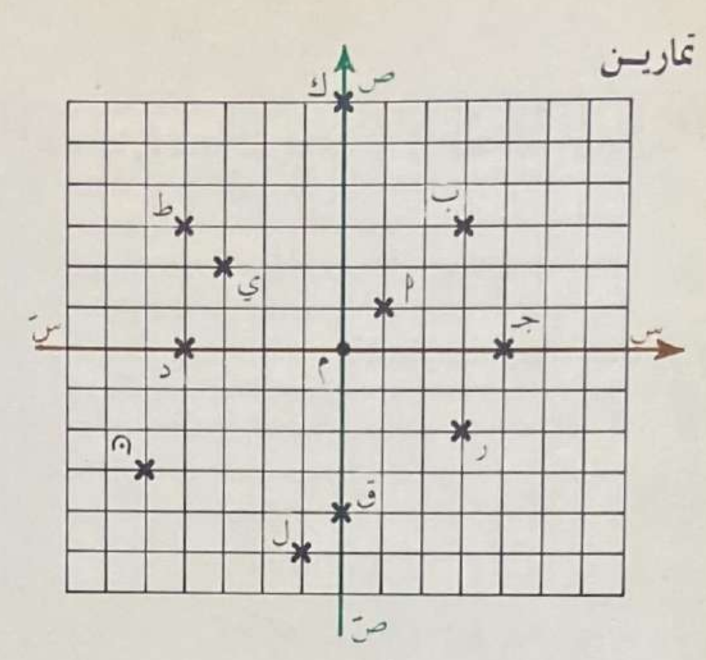
شكل (٢)

لكي نمثّل زوجًا مرتبًا من الأعداد الصحيحة على شبكة تربيع حُدّدت محاورها السينية والصادية، نعيّن النقطة من المستوى حيث الحدّ الأول هو الإحداثي السيني، والحدّ الثاني هو الإحداثي الصادي.

٣) المستوى الديكارتي صه × صه

مجموعة النقاط على شبكة التربيع التي تمثّل جميع الأزواج المرتبة (أ، ب)، حيث: أ ∈ صه، وَ ب ∈ صه؛ تسمّى: **المستوى الديكارتي** صه × صه.

تمارين



١) حدّد على شبكة التربيع أعلاه إحداثيات النقاط : م ، ب ، جـ ، د ، ط ، ي ، ك ، ل ، م ، ن ، ق ، ر .

٢) ارسم شبكة تربيع ، وحدّد عليها محور الإحداثيات السينية ، ومحور الإحداثيات الصادية ، ثم مثّل النقاط التالية :

م (٠ ، +٢) ؛ ب (٠ ، +٤) ؛ جـ (+٣ ، ٠) ؛
د (−٥ ، ٠) ؛ هـ (+٢ ، +٢) ؛ و (−٢ ، +٢) ؛
ز (+٢ ، −٢) ؛ حـ (−٢ ، −٢) ؛ ط (٠ ، −٥) ؛
ي (−٦ ، +٣) ؛ ك (+٤ ، −٥) ؛ ل (−١ ، +٥) ؛

٣) حدّد في المستوى الديكارتي صـ × صـ ، النقاط الممثلة للأزواج المرتبة (س ، ص) ، حيث : س ⩾ ٠ ، وَ ص ⩾ ٠

مجموعة هذه النقاط تسمّى الربع الأول من صـ × صـ .

٤) كما في التمرين ٣ ، حدّد على التوالي النقاط الممثلة للأزواج المرتبة (س ، ص) ، حيث :

أ − س ⩽ ٠ ، ص ⩾ ٠

ب − س ⩽ ٠ ، ص ⩽ ٠

ج − س ⩾ ٠ ، ص ⩽ ٠

مجموعة هذه النقاط تسمّى على التوالي :

الربع الثاني من صـ × صـ ، الربع الثالث من صـ × صـ ، الربع الرابع من صـ × صـ .

٥) في المستوى الديكارتي صـ × صـ .

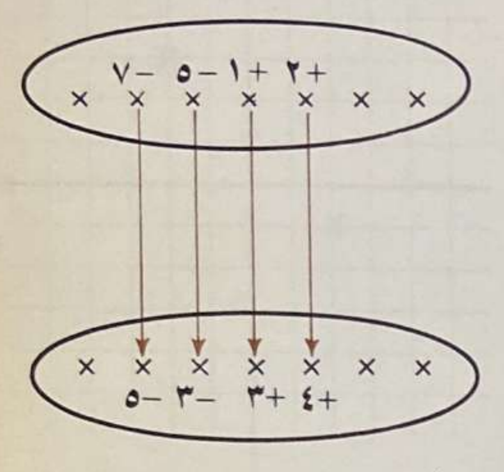
أ − عيّن النقاط : م (+٣ ، +٥) ؛ ب (−٥ ، +٤) جـ (+٦ ، −٥) ؛ د (−٣ ، −٣) .

ب − حدّد المحورين الذي أصل كل منهما النقطة ن (+٣ ، +٤) ، والموازيين للمحورين الأساسيين ، ولهما المنحى نفسه ووحدة الطول نفسها .

حدّد إحداثيات النقاط : (م ، ب ، جـ ، د) بالنسبة لهذين المحورين الجديدين .

الدرس الثالث : تمثيل العلاقات العدديّة

١) ماهية العلاقات العدديّة



شكل (١)

■ على الشكل (١) جزء من تمثيل علاقة من ص نحو ص بواسطة الرسم السهمي.

ما هي صورة −٧ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة +١ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة +٢ بهذه العلاقة؟

ما هي صورة العدد الصحيح س بهذه العلاقة؟

املأ الفراغ فيما يلي، علمًا بأن ص هي صورة س بهذه العلاقة: ص = س + ...

عناصر مجال العلاقة في المثال السابق هي أعداد صحيحة، وكذلك بالنسبة لعناصر المجال المقابل للعلاقة.

نقول في هذه الحال: إن العلاقة هي **علاقة عددية في ص**.

> كل علاقة مجالها جزء من مجموعة الأعداد الصحيحة ص، ومجالها المقابل جزء من المجموعة نفسها، تسمّى **علاقة عددية في ص**.

لاحظت في النشاط السابق أنه إذا كان العدد ص صورة العدد س بالعلاقة المعرّفة، فإن:

ص = س + ٢.

نقول : إن الجملة «ص = س + ٢» هي **معادلة العلاقة العددية** السابقة.

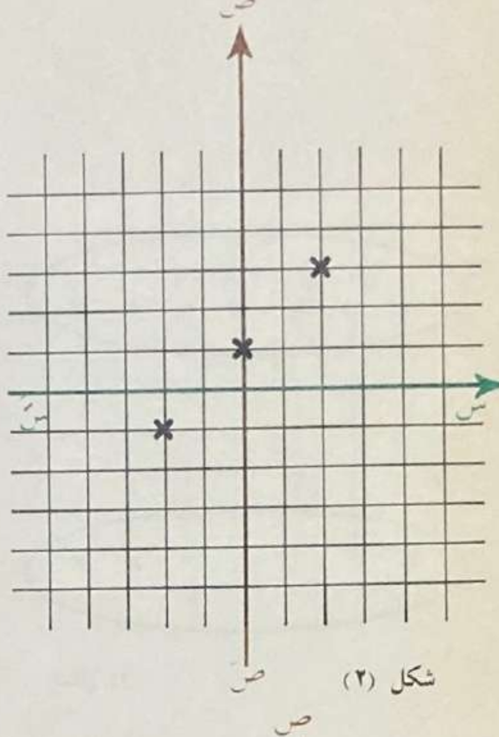
٢) تمثيل علاقة عددية في المستوى الديكارتي

حدّدنا العلاقة العددية في ص التي معادلتها هي :

ص = س + ١.

■ أكمل الجدول التالي علمًا بأن (س ، ص) هو زوج مرتّب من الأزواج التي تحدّد العلاقة :

س	−٤	−٣	−٢	−١	٠	+١	+٢	+٣	+٤
ص			−١		+١		+٣		



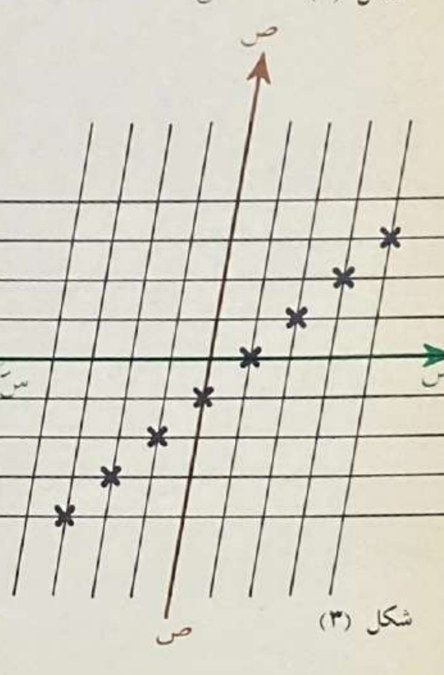
شكل (٢)

على الشكل (٢)، مثّلنا الأزواج المرتبة : (−٢ ، −١)، (٠ ، ١)، (+٢ ، +٣) في المستوى الديكارتي ص × ص . مثّل أزواجًا مرتّبة أخرى من بين الأزواج التي تحدّد العلاقة.

في النشاط السابق **مثّلنا العلاقة** العددية التي معادلتها : ص = س + ١ في المستوى الديكارتي ص × ص .

٣) تفسير علاقة عددية من تمثيلها في المستوى الديكارتي

■ الشكل (٣) يمثّل المستوى الديكارتي ص × ص ، وقد ميّزنا على الشبكة نقاطًا تمثّل علاقة عدديّة في ص .



شكل (٣)

ارسم جدولاً على الشكل التالي ، علمًا بأنّ (س ، ص) هو زوج من الأزواج المرتبة التي تحدّد العلاقة :

س	
ص	

املأ الفراغ فيما يلي ص = س - (......).

في النشاط السابق **فسّرتَ** علاقة عددية من تمثيلها في المستوى الديكارتي ص~ × ص~ وَ **وجدتَ معادلتها**.

تمارين

١) مثّل العلاقات العدديّة في ص~ ، والتي معادلاتها :

ص = ٣س ؛ ص = س

ص = − ٢س ؛ ص = −س

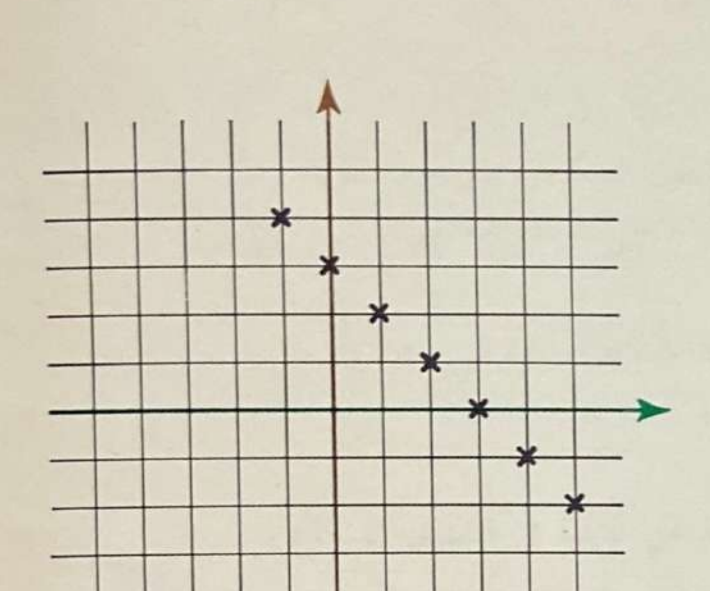
٢) مثّل العلاقات العدديّة في ص~ ، والتي معادلاتها :

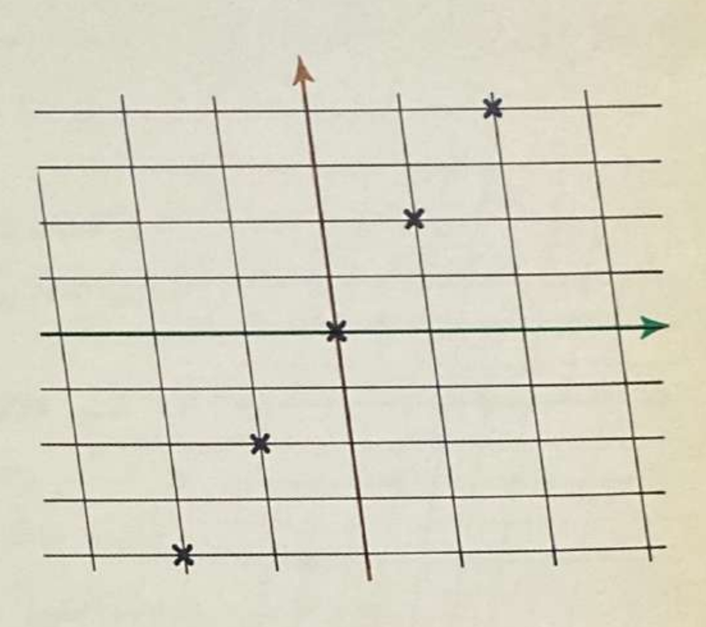
ص = س + ٢ ص = ٣س − ٢

ص = س − ٣ ص = ١ − س

ص = ٢ س + ١ ص = − ٢ − س

٣) جد معادلات العلاقات العددية الممثلة على الأشكال التالية :





٤) على شبكة تربيع متعامدة نظيميّة، اخترنا محورين ومثّلنا في المستوى الديكارتي صه × صه الحاصل، العلاقتين المعروفتين بمعادلتيهما:

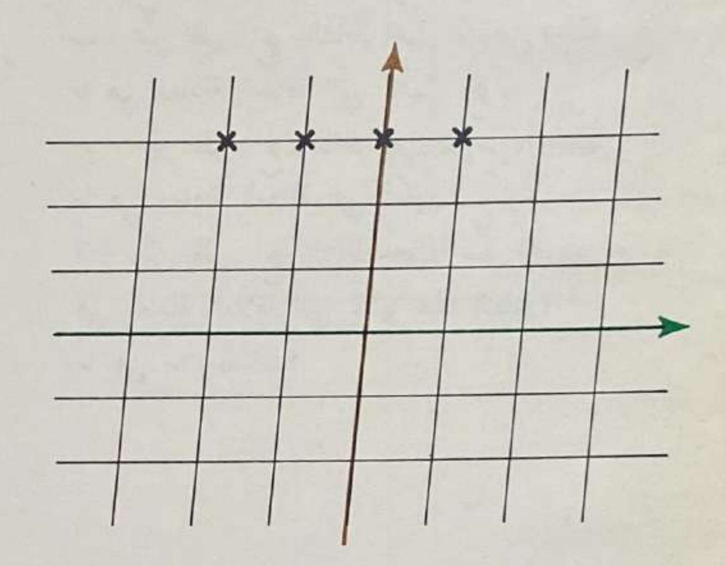
ص = س وَ ص = −س

أ – مثّل هاتين العلاقتين.

ب– مجموعة النقاط الممثلة للعلاقة ص = س هي على مستقيم ٢ب.

كيف هو المستقيم ٢ب بالنسبة للمستقيمين سَ س وَ صَ ص؟

جـ – مجموعة النقاط الممثلة للعلاقة ص = − س هي على مستقيم جـ د. كيف هو المستقيم جـ د بالنسبة للمستقيمين سَ س وَ صَ ص؟



٥) مثّلنا على الشكل السابق علاقة عدديّة في صه.

أ – جد إحداثيات النقاط المعيّنة.

ب – عيّن ثلاث نقاط أخرى من تمثيل العلاقة نفسها.

جـ – ما هي قيمة ص، إذا كان (س ، ص) أحد الأزواج المرتّبة التي تحدّد هذه العلاقة؟

٦) مثّل العلاقات العدديّة المعرّفة كما يلي:

أ – أيًّا كان س، فإن ص = +٤

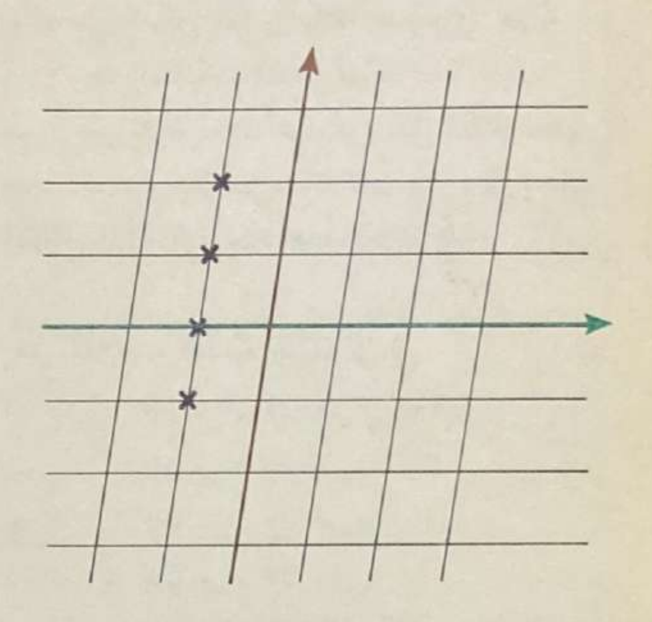
ب – أيًّا كان س، فإن ص = −٣

جـ – أيًّا كان س، فإن ص = ١

د – أيًّا كان س، فإن ص = ٠

ما هي خاصية المستقيمات التي تنتمي إليها مجموعة النقاط الممثلة للعلاقات السابقة؟

٧) على الشكل ادناه مثّلنا علاقة عدديّة في ص.



أ – جد إحداثيات النقاط المعيّنة.

ب – عيّن ثلاث نقاط أخرى من تمثيل العلاقة نفسها.

جـ – ما هي قيمة س، إذا كان (س، ص) أحد الأزواج المرتبّة التي تحدّد هذه العلاقة؟

٨) مثّل العلاقات العدديّة المعرّفة كما يلي:

أ – أيًّا كان ص، فإن س = +٢

ب – أيًّا كان ص، فإن س = −٤

جـ – أيًّا كان ص، فإن س = +٥

د – أيًّا كان ص، فإن س = ٠

ما هي خاصية المستقيمات التي تنتمي إليها مجموعة النقاط الممثّلة للعلاقات السابقة؟

٩)

أ – في المستوى الديكارتي ص × ص، حيث المحوران متعامدان، وحيث طول الوحدة هو نفسه على المحورين، مثّل العلاقة العددية التي معادلتها:

ص = س + ٢

سمّ ع مجموعة النقاط التي تمثّل العلاقة.

ب – عيّن نظير ع بالتناظر حول صَ ص وسمّه عَ.

ما هي معادلة العلاقة التي تمثّلها عَ.

جـ – عيّن نظير عَ بالتناظر حول سَ س، وسمّها عً.

ما هي معادلة العلاقة التي تمثّلها عً؟

د – عيّن نظير ع بالتناظر حول أصل المحورين م. ما هي معادلة العلاقة التي يمثّلها هذا النظير؟

ما هي ملاحظاتك؟



١٢٣٤٥٦٧٨٩٠١

一 二 三 四 五 六 七 八 九 十 一

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1

I II III IIII V VI VII VIII IX X I